

Soluzioni esatte e soluzioni numeriche della conduzione termica nell'industria alimentare, in condensatori commerciali e nelle pale di turbina

Se la conducibilità termica k può essere considerata costante nel campo di temperatura del materiale in studio, è possibile ricorrere a soluzioni esplicite della equazione di conservazione del calore senza far uso di codici commerciali agli elementi finiti. Si mostra la sovrapposibilità dei risultati.

EXACT SOLUTIONS AND NUMERICAL SOLUTIONS IN HEAT CONDUCTION IN ALIMENT INDUSTRY, IN COMMERCIAL CAPACITORS AND IN TURBINE BLADES

When thermal conductivity k is constant inside the temperature range of the material under exam it is possible to use the exact solution of the energy conservation equation without applying the finite element commercial codes. Comparison between results is shown.

INTRODUZIONE

In geometrie complesse dove la conduzione è stazionaria o in transitorio, con o senza produzione di calore interna, in oggetti sottoposti a condizioni al contorno diverse, di flusso termico assegnato o di Robin o in combinazione tra loro, oppure di Neumann o di Dirichlet, è pratica consolidata calcolare le temperature da modelli agli elementi finiti (FE) ormai disponibili in commercio e di ampia applicabilità.

Sono disponibili anche soluzioni analitiche per casi stazionari e transitori in cilindri e collari (superfici estese) sotto condizioni al bordo di irraggiamento e convezione (Robin), se la conducibilità termica è costante ed isotropa [1, 2, 3, 4].

In casi in cui la conducibilità sia anisotropa e forte funzione della temperatura o il materiale non sia omogeneo la soluzione esatta non esiste. Nonostante molte strutture di interesse nella meccanica siano di geometria complessa, o il materiale sia di consistenza molto viscosa, come negli alimenti da sterilizzare, si dimostra che la riduzione delle equazioni di trasporto del calore a forme più semplici è possibile, che di esse si trova una soluzione esplicita e che le soluzioni sono confrontabili a quelle della modellazione agli elementi finiti la quale consente una maggiore aderenza sia alla geometria sia alle proprietà reali del materiale.

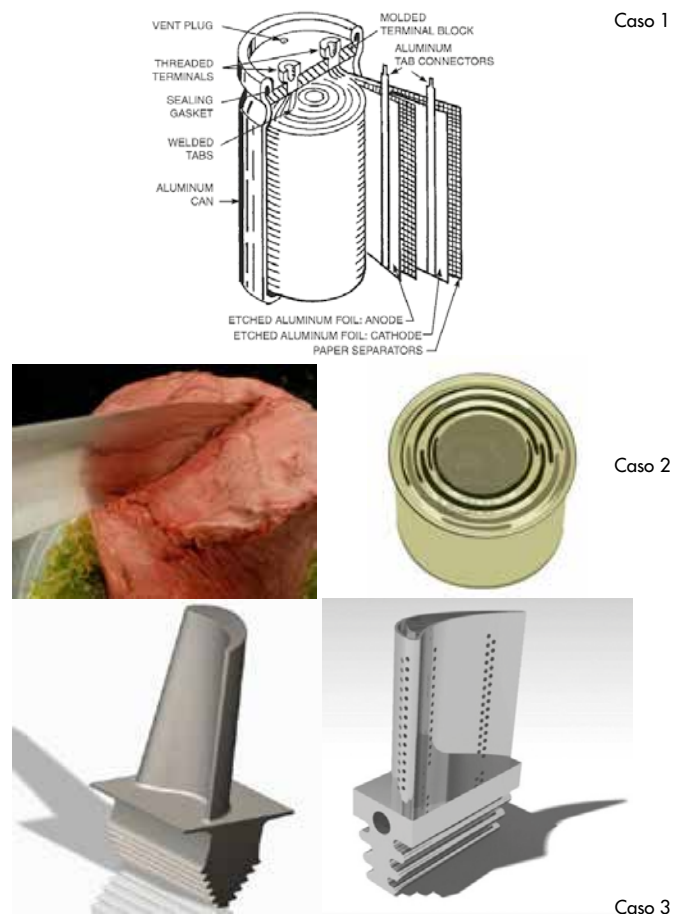
Nel presente lavoro sono state modellate anche le pale di turbogas dei primi stadi, nella realtà sottoposte ad irraggiamento di entità diversa tra bordo d'attacco e ventre e dorso, con in parallelo la convezione, raffreddate alla radice da altro fluido, ed è stata trovata la soluzione esatta del campo di temperatura.

In precedenti attività sono stati studiati e risolti analiticamente casi di somministrazione mobile del calore dall'esterno, nelle saldature del tipo stir welding [5]. Lo scopo del lavoro è dimostrare che spesso è possibile, persino con una calcolatrice palmare, avere soluzioni del campo di temperatura senza ricorrere a più complessi codici di calcolo FE ed a costosi tempi di elaborazione.

I tre casi di interesse ingegneristico e di processo che esemplificano quanto detto sono mostrati nella Figura 1.

- Il caso 1 è un condensatore elettrolitico. Il suo campo di temperatura T è stato risolto con un codice agli elementi finiti commerciale. Si

FIGURA 1 - Casi di studio



tratta di una modellazione completamente 3-D stazionaria con produzione di calore interna. La conducibilità k è trattata dal codice FE come anisotropa, diversa nelle tre direzioni del sistema polare scelto, radiale assiale circonferenziale. La k dipendente dall'angolo φ è però di 3 ordini di grandezza più piccola rispetto alla radiale ed alla assiale e quindi è stata trascurata anche in modellistica FE. Per confermare sperimentalmente la T del condensatore scelto in esercizio, è stato realizzato un circuito elettrico sperimentale di prova. Il caso è stato quindi analizzato e risolto analiticamente con k costante.

- Il caso 2 è un contenitore di carne omogeneizzata in scatola. La modellazione è quindi del tipo evolutivo, funzione del tempo. Il caso è stato studiato come full 2-D assialsimmetrico con gli elementi finiti, e poi modellato come 2-D analiticamente. In entrambi i casi sono state applicate condizioni al contorno di temperatura assegnata (Dirichlet) e di convezione (Robin), meno efficace ai fini della rapida penetrazione dell'onda termica sino al centro del materiale. I dati delle due modellistiche sono stati poi confrontati con quelli sperimentali rilevati nell'autoclave di sterilizzazione.
- Il caso 3 è una pala di turbogas sottoposta ad irraggiamento e convezione sul bordo d'attacco e su ventre e dorso. La difficoltà della soluzione analitica nasce dalla modellazione della forma per tenere conto della riduzione dello spessore tra bordo d'attacco e bordo d'uscita e dalla necessità di portare a zero lo spessore del manufatto in uscita, al fine di generare l'equazione di trasporto dell'energia in forma 2-D ellittica però di tipo "degenerativo" perché mancante di una condizione al bordo. Il caso è stato studiato anche full 3-D con un codice commerciale agli elementi finiti. I risultati ottenuti con i diversi metodi sono stati confrontati tra loro.

La modellazione riveste un interesse reale perché eccessivi innalzamenti di temperatura riducono drasticamente il tempo di vita dei condensatori e nel processo di sterilizzazione degli alimenti (carne in scatola, tonno, ricotta, formaggi, etc.) per ridurre i costi di trattamento, al contempo avendo la garanzia del tempo di sterilizzazione al centro, è necessario conoscere la velocità di penetrazione dell'onda termica. Il danneggiamento poi delle pale di turbogas dipende non solo dalle temperature massime raggiunte dalla lega metallica ma anche dai gradienti di temperatura e dai punti caldi (i cosiddetti hot spot).

Soluzione del caso 1: condensatore elettrolitico

L'equazione evolutiva di trasporto del calore per la conduzione è:

$$\frac{d\theta}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \frac{W_i}{\rho c} \quad (1)$$

In condizioni stazionarie e valori al bordo di convezione assegnata è stata risolta con un pacchetto commerciale agli elementi finiti full 3-D. Con θ è indicata la temperatura all'interno del condensatore riferita a quella ambiente in condizioni di ventilazione forzata, quindi nota, in accordo alla espressione seguente, dove V rappresenta la velocità dell'aria.

$$h = 11\sqrt{(V + 0.25) / (0.25)} \quad [W/m^2K]$$

La formulazione risolta analiticamente è più semplice ed è 2-D in coordinate polari con k costante, come di seguito:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{W_i}{k} = 0 \quad (2)$$

dove W_i è la produzione di calore volumetrica del condensatore. Se non fosse presente potrebbe essere più agevole risolvere l'equazione attraverso il metodo della separazione delle variabili con condizioni al bordo omogenee. Nel caso in esame abbiamo invece studiato una soluzione data dalla sovrapposizione di due effetti θ_1 e θ_2 che risolvono due equazioni differenziali associate, una alle derivate ordinarie (O.D.) che assorbe il termine di generazione di potenza e l'altra alle derivate parziali (P.D.), in r e z come mostrato:

$$\theta(r, z) = \theta_1(r) + \theta_2(r, z)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta_1}{dr} \right) + \frac{W_i}{k} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} = 0$$

L'equazione alle derivate parziali a questo punto si può risolvere con la separazione delle variabili:

$$\theta_2(r, z) = R(r)Z(z)$$

Le condizioni al bordo per θ_1 e θ_2 vanno riviste per rispettare quelle di $\theta = \theta_1 + \theta_2$. Introducendo il numero di Biot e le funzioni di Bessel del primo tipo di ordine 0 ed 1 e trovando gli autovalori infiniti dalle condizioni al bordo, raggio = a e metà altezza = L , si arriva infine alla soluzione:

$$\frac{\alpha a}{Bi} = \frac{J_0(\alpha a)}{J_1(\alpha a)} \quad (Bi = ha / k)$$

$$\lambda_n = \alpha_n a$$

$$\theta_{2,n} = C_n \cosh(\alpha_n z) J_0(\alpha_n r)$$

$$C_n = \frac{\frac{hW_i a Bi}{k^2 \alpha_n J_1(\lambda_n)} - \frac{2Bi^2 W_i}{\alpha_n J_1(\lambda_n) k(2 + a/L)} - \frac{2hW_i Bi^2}{\alpha_n^3 a k^2 J_1(\lambda_n)}}{\left[\alpha_n \sinh(\alpha_n L) + \frac{h}{k} \cosh(\alpha_n L) \right] [Bi^2 + \lambda_n^2]}$$

$$\theta = \frac{W_i a^2}{4k} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{W_i a}{h(2 + a/L)} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(\alpha_n z) J_0(\alpha_n r)$$

La soluzione esatta è data da una soluzione infinita; la soluzione esplicita finale tiene conto solo dei primi $n = 30$ autovalori. Essa infatti converge ad un dato che non varia oltre lo 0.1%.

Il risultato analitico può essere facilmente scritto e calcolato in calcolatrici palmari che abbiano solutori matematici. La differenza tra il risultato ottenuto con più sofisticati calcoli numerici agli elementi finiti che tengano conto della anisotropia della conducibilità e delle 3 dimensioni polari è mostrata nella figura 2.

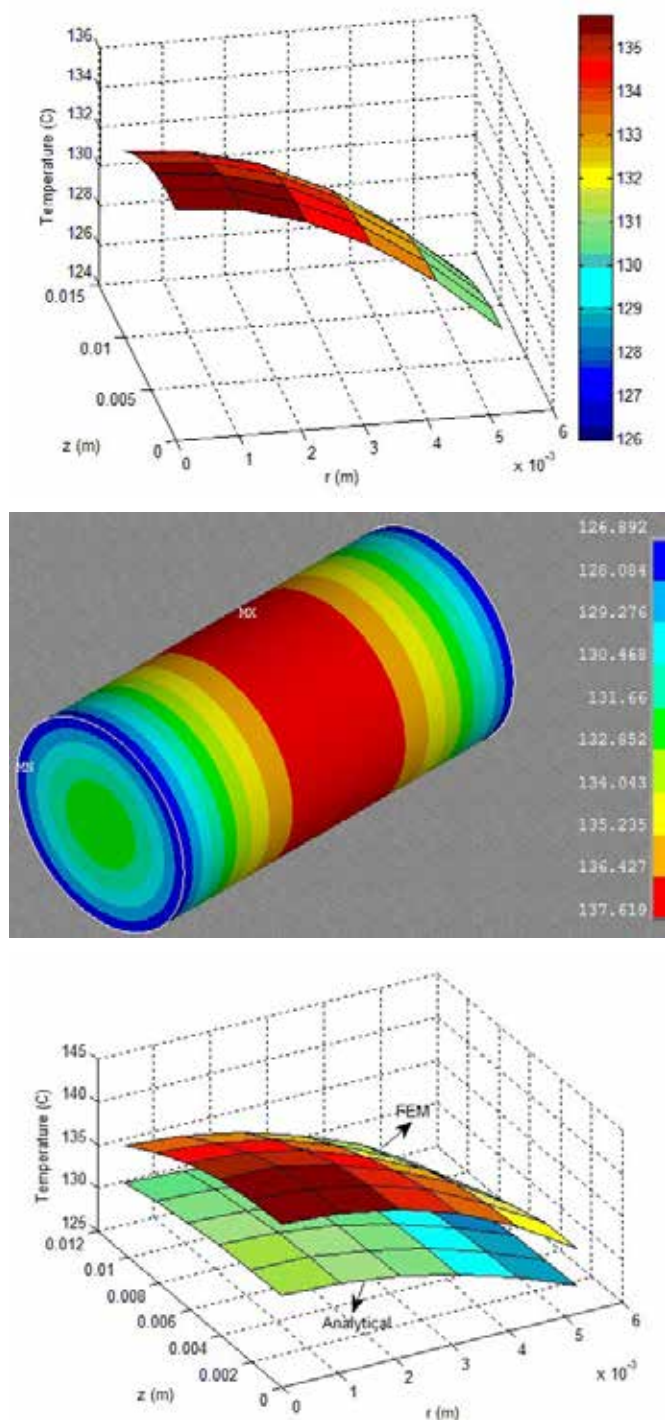


FIGURA 2 - Soluzione analitica; Soluzione FE; Confronto

Soluzione del caso 2: carne omogeneizzata in scatola

L'equazione completa della conduzione del calore nel materiale è la (1). Data la caratteristica della massa in cottura, leggermente disomogenea ed a strati, è possibile che la conducibilità sia anisotropa. I programmi commerciali agli elementi finiti sono generalmente in grado di tenerne conto. La soluzione analitica scelta invece è la seguente, due dimensioni ed in evoluzione col tempo a k costante:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{a_t} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{dove} \quad a_t = \frac{k}{\rho c} \quad (3)$$

L'equazione è risolta sia sotto condizioni di convezione forzata, sia di temperatura assegnata immaginando un piano di simmetria al centro della variabile assiale (vedi fig.3).

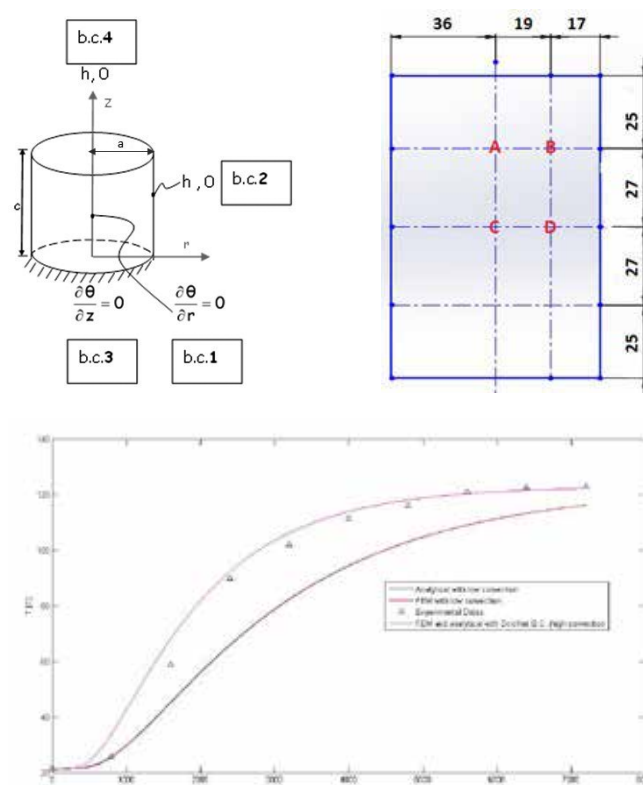


FIGURA 3 - Modello; Punti sperimentali; Confronto tra dati sperimentali e soluzione esplicita ed FE

È necessario conoscere la temperatura iniziale $\theta_i = T_{\text{iniziale}} - T_{\infty}$, dove T_{∞} è la temperatura esterna del fluido scaldante, generalmente vapore saturo.

La soluzione analitica è del tipo ottenibile con la separazione delle variabili:

$$\theta(r, z, t) = R(r) \cdot Z(z) \cdot \tau(t)$$

Tenuto conto dei numeri di Biot Bi_a e Bi_c nella direzione $r = a$ e $z = c$, le condizioni al bordo sono risolte per due infinite serie di autovalori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_n$ (per semplicità, λ_n)... $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_m$

La soluzione della equazione alle derivate ordinarie nel tempo t è:

$$\tau = \exp[-(\alpha_n^2 + \beta_m^2) a_t t]$$

Infine la soluzione esatta della equazione è:

$$\frac{\theta(r, z, t)}{\theta_i} = 2 Bi_a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0 \left(\lambda_n \frac{r}{a} \right) e^{-\lambda_n^2 Fo_a}}{(\lambda_n^2 + Bi_a^2) J_0(\lambda_n)} \cdot 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\beta_m c) \cos(\beta_m z) e^{-\beta_m^2 a_t t}}{\beta_m c + \sin(\beta_m c) \cos(\beta_m c)}$$

Dove $\frac{a_t}{a^2} t = Fo_a$ (numero di Fourier)

Nel modello analitico la massa è immaginata un continuo a composizione e densità ρ , calore specifico c e conducibilità k costanti. Il fluido di riscaldamento bagna inoltre uniformemente la scatola cilindrica su ogni superficie.

Nella figura 3 sono mostrate in sequenza il modello geometrico, i punti all'interno della massa la cui temperatura è riportata nei diagrammi successivi, dove la soluzione analitica è confrontata con i dati sperimentali [6] e con la soluzione FE 2-D assialsimmetrica. I risultati della soluzione analitica presentano un'ottima sovrapposizione con quelli sperimentali e con quelli FE.

Soluzione del caso 3: pala di turbogas

La previsione teorica delle prestazioni di pale di turbina raffreddate all'interno ed all'esterno da film cooling non è ancora una "scienza esatta". Prova ne sia che negli ultimi 30 anni la ricerca è stata indirizzata a comprendere il campo di moto e di temperatura del gas combusto e quindi le condizioni al contorno da applicare al metallo per dimensionare il raffreddamento ed evitare il danneggiamento delle pale [7, 8, 9, 10, 11]. I gas entrano in turbina a più di 1800 K e non esistono metalli e rivestimenti che resistano.

Se le condizioni al contorno sono note, i programmi agli elementi finiti più evoluti sono in grado di seguire la complessa geometria dei canali di raffreddamento e, note le caratteristiche del fluido refrigerante, valutare la temperatura nel metallo. Esistono delle incertezze però sull'entità dell'irraggiamento gassoso e sul valore di Nusselt nel passaggio dal bordo d'attacco al bordo d'uscita.

Il caso studiato è tridimensionale, geometricamente complesso (vedi la fig. 4) e richiede una semplificazione per essere trattato analiticamente. Nella stessa figura si mostra il modello. Tecnicamente il bilancio delle potenze scambiate per conduzione, convezione ed irraggiamento conduce ad una equazione differenziale alle ordinate parziali (P.D.) in T del tipo quasi-bidimensionale. Si tratta di una P.D.E. ellittica del tipo degenerativo con condizioni al bordo miste: di Dirichlet al bordo d'uscita, flusso radiativo noto e Robin assieme sul bordo d'attacco e su ventre e dorso, e di convezione assegnata alla piattaforma.

L'ipotesi di quasi-bidimensionalità è possibile perché il n. di Biot basato sullo spessore medio della pala è $< 1/6$.

Ipotizzando che la pala sia raffreddata all'interno, l'equazione di bilancio del calore ingloba sia irraggiamento e convezione su ventre e dorso, sia una legge di raffreddamento all'interno $W_i(x)$ funzione della variabile curvilinea x .

L'espressione analitica del bilancio è mostrata nel seguito:

$$\left(kg(x)(T(x) - T_\infty)_x \right)_x \Delta x \Delta y + \left(kg(x)(T(x) - T_\infty)_y \right)_y \Delta x \Delta y + 2q_2'' \Delta x \Delta y - 2h_\infty (T(x) - T_\infty) \Delta x \Delta y - W(x)g(x) \Delta x \Delta y = 0$$

Semplificando:

$$(x^2 T_x)_x + x^2 T_{yy} - m^2 (T - T_\infty) = -n + W \quad (4)$$

$$m^2 = 2h_\infty L^2 / kb, \quad n = 2q_2'' L^2 / kb, \quad W(x) = x^2 W / k, \quad g(x) = b(x/L)^2$$

Il primo caso risolto analiticamente prevede il raffreddamento dalla piattaforma, che appare come una condizione al bordo alla radice, senza il termine di sottrazione del calore $W_i(x)$ rappresentativo delle canalizzazioni. Il metodo di soluzione prevede l'ipotesi di un doppio effetto di funzioni somma, come di seguito mostrato:

$$T(x, y) = \varphi(x) + \psi(x, y)$$

b.c.1 Definite value

$$\text{b.c.2} \quad \frac{d\varphi}{dx} \Big|_L + \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{L,y} = \frac{q_1''}{k} - \frac{h_\infty}{k} [\varphi(L) + \psi(L, y) - T_\infty]$$

$$\text{b.c.3} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{x,0} = 0$$

$$\text{b.c.4} \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_{x,l} = -\frac{h_0}{k} [\varphi(x) + \psi(x, l) - T_0]$$

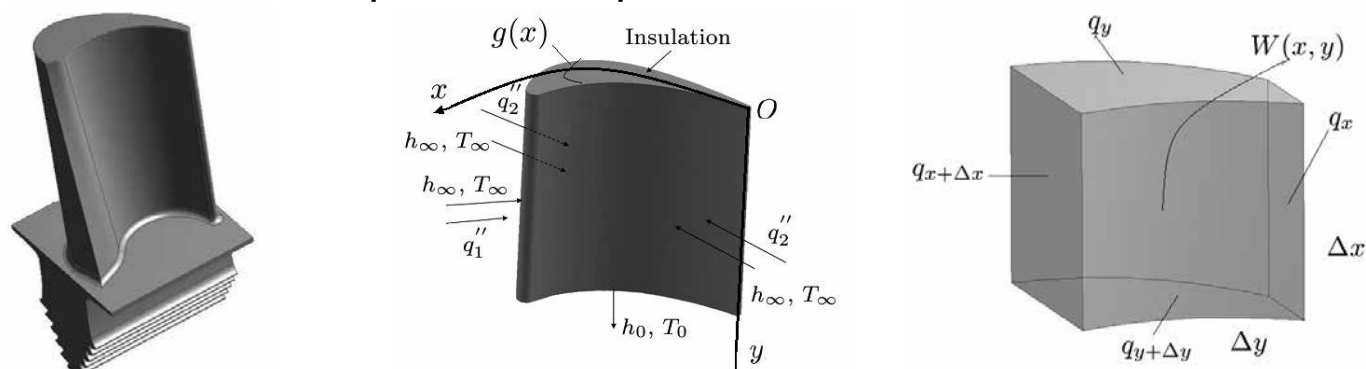
La equazione solo in x è della famiglia delle equazioni alle derivate ordinarie:

$$\text{Dalla teoria analitica: } \frac{d}{dx} \left[x^a \frac{dy}{dx} \right] + y \gamma^2 x^\beta = 0 \quad e \quad \beta - a + 2 = 0$$

$$r^2 + (a-1)r - m^2 = 0$$

$$r_1 = [-1 + (1 + 4m^2)^{1/2}] / 2, \quad r_2 = [-1 - (1 + 4m^2)^{1/2}] / 2$$

FIGURA 4 - Pala ti TG; Modello pala di TG; Modello quasi 2D



si arriva al valore di φ .

La equazione P.D. è a questo punto risolvibile col metodo della separazione delle variabili

$$\psi = X(x)Y(y)$$

$$Y(y) = C_1 \sinh(\lambda y) + C_2 \cosh(\lambda y)$$

$$X(x) = x^{-(1/2)} C J_b(\lambda x) \quad (b = (m^2 + 1/4)^{(1/2)})$$

$$\frac{J_b(\lambda L)}{J_{b-1}(\lambda L)} = \frac{\lambda L}{1/2 + b - Bi_L}$$

Si è ricorsi alle funzioni di Bessel del primo tipo di ordine reale $b = (m^2 + 1/4)^{1/2}$

La soluzione finale è:

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cosh(\lambda_n y) x^{-(1/2)} J_b(\lambda_n x) + (N/m^2 + Bx^a)$$

$$C_n = \frac{\frac{h_0}{k} \left(-T_{\infty} + T_0 - \frac{q_2}{h_{\infty}} \right) \int_0^L x^{\frac{3}{2}} J_b(\lambda_n x) dx - \frac{h_0}{k} B \int_0^L x^{a+\frac{3}{2}} J_b(\lambda_n x) dx}{\left(\lambda_n \sinh(\lambda_n l) + \frac{h_0}{k} \cosh(\lambda_n l) \right) \int_0^L x J_b^2(\lambda_n x) dx}$$

I valori seguenti della tabella 1 sono stati usati per ottenere i risultati. Sono dati la conducibilità della lega, i coefficienti di scambio termico convettivo lato gas e lato raffreddamento alla radice, i flussi radiativi, la temperatura dei gas e del fluido di raffreddamento, la lunghezza della pala in x ed in y e lo spessore massimo sul bordo d'attacco.

$L = 0.062$ (m)	$h_{\infty} = 200$ (Wm ⁻² K ⁻¹)	$T_{\infty} = 1700$ (K)	$q_1'' = 5 \cdot 10^4$ (Wm ⁻²)
$l = 0.066$ (m)	$h_0 = 1000$ (Wm ⁻² K ⁻¹)	$T_0 = 400$ (K)	$q_2'' = 2 \cdot 10^4$ (Wm ⁻²)
$b = 0.014$ (m)	$k = 12$ (Wm ⁻¹ K ⁻¹)		

Dal momento che la temperatura è la somma di una soluzione 1-D e di un termine somma di una serie infinita, è stata necessaria una analisi di sensibilità sul numero massimo di autovalori da considerare. Dopo i primi 30 valori le temperature non cambiano più dello 0.1%. Si vede che la soluzione quasi-bidimensionale non è ingegneristicamente credibile al bordo d'uscita ad $x=0$. L'effetto dell'irraggiamento, la forma degenerativa della equazione e la condizione al bordo di Dirichlet forzano la temperatura del metallo ad andare oltre il valore di T_{∞} .

Salvo l'area vicina alla piattaforma, la temperatura è dovunque troppo alta per essere sostenuta da qualsiasi lega. Evidentemente l'equazione di bilancio, per essere ingegneristicamente più credibile deve inglobare un termine che rappresenti la legge di sottrazione di calore W_i dovuta alle canalizzazioni. La risoluzione analitica non sarà quindi possibile.

Almeno per il caso in esame i dati espliciti sono stati confrontati con quelli ottenuti numericamente dal programma commerciale ANSYSTM. Si è cercato di mantenere il layout del modello quanto

più identico possibile, apportando il raffreddamento solo alla radice della pala. Le variazioni in temperatura tra i due approcci sono inferiori a 20°C.

CONCLUSIONI

Nel presente lavoro è stata presentata la modellazione di tre casi di interesse ingegneristico e di processo. Si tratta di manufatti e materiali sottoposti alla evoluzione nel tempo o stazionari, con produzione interna di calore o no e completamente tridimensionali ma riconducibili ad un approccio 2-D o quasi-bidimensionale.

In tutti i casi l'equazione del bilancio del calore non omogenea è stata risolta nella ipotesi che la conducibilità termica vari molto poco nello spazio e con la temperatura. È stata risolta sia nelle condizioni al bordo più complesse, non omogenee che prevedevano sia flussi assegnati (irraggiamento) sia ventilazione e quindi convezione in parallelo, sia nella condizione più semplice di temperatura al contorno assegnata (Dirichlet).

I risultati sono stati ottenuti sia come somma di effetti di funzioni 1-D e 2-D, sia ricorrendo alla separazione delle variabili. In tutti i casi i risultati sono stati ottenuti nella forma di espansioni in serie che inglobano funzioni iperboliche e funzioni di Bessel del 1° e 2° tipo di ordine v intero o reale, a seconda dei casi in studio. Gli autovalori richiesti dagli sviluppi in serie sono trovati dalle condizioni al contorno omogenee, e dalle condizioni al bordo non omogenee facendo uso del principio di ortogonalità delle funzioni di Bessel del 1° tipo, attraverso l'analisi di Fourier.

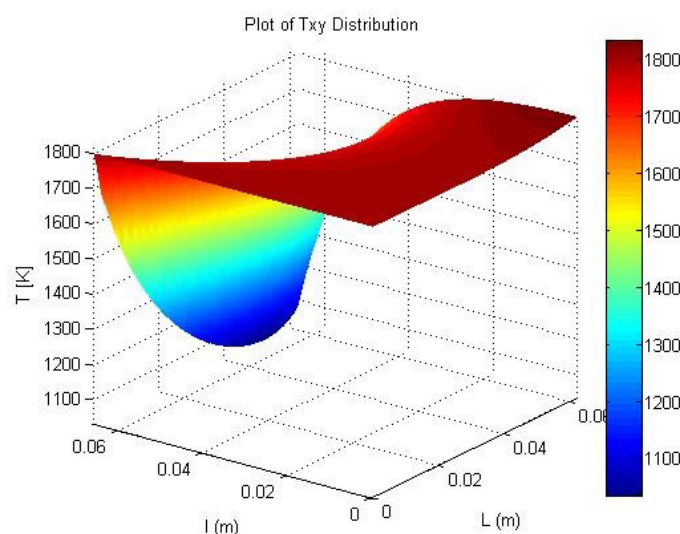
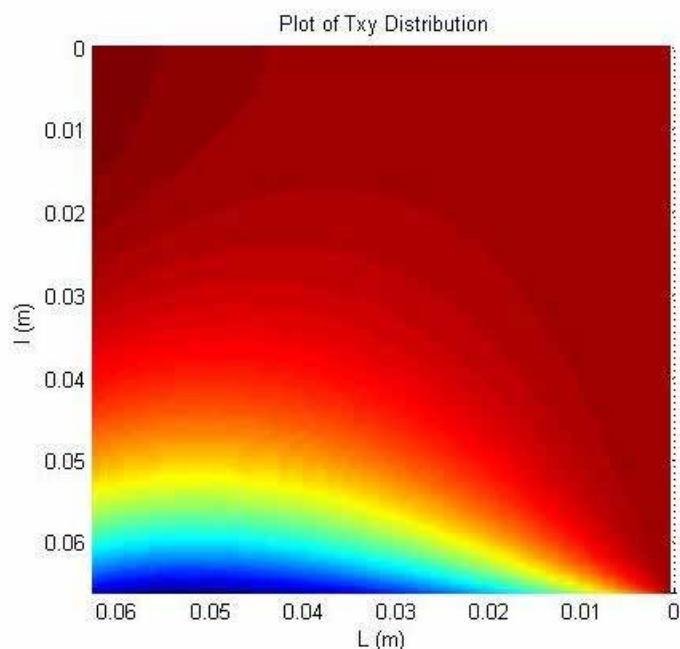
Si è trovato che è sufficiente un numero finito di autovalori – di solito intorno a 30-40 per avere una soluzione analitica esplicita convergente.

Al fine di testare la validità di una modellazione 2-D stazionaria o in evoluzione nel tempo, con o senza produzione interna di calore, quasi 2-D gli stessi casi sono stati risolti con un codice avanzato agli elementi finiti completamente 3-D e che consente di inserire la conducibilità come funzione isotropa della temperatura o addirittura anisotropa nel caso di materiali a strati (vedi il condensatore elettrolitico).

È importante ricordare che il riscaldamento eccessivo dei condensatori ne riduce notevolmente il tempo di vita, che il costo della sterilizzazione degli alimenti in scatola dipende da quanto rapidamente la temperatura utile raggiunge il centro della massa e che il danneggiamento delle pale di turbogas dipende non solo dalle temperature massime raggiunte dalla lega ma anche dai gradienti di temperatura e dai punti caldi surriscaldati.

Il vantaggio di una trattazione analitica è che i risultati, ove possibile una semplificazione del modello fisico, possono essere ottenuti da solutori matematici e calcolatori palmari come prima risposta alla misura del campo di temperatura. Il ricorso a programmi di calcolo agli elementi finiti richiede tempo, calcolatori veloci e costi di esercizio talvolta elevati.

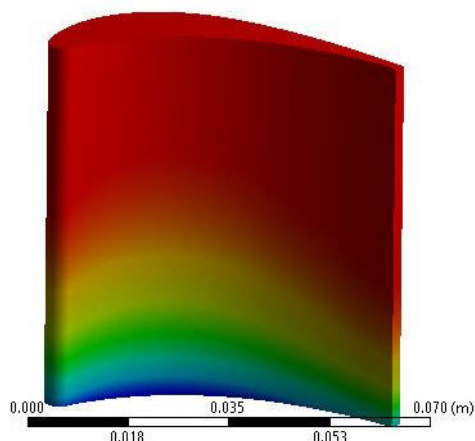
Nel caso della pala di turbina l'approccio usato non è sufficiente per avere informazioni di progetto per il raffreddamento, se pure molto simili sono i risultati ottenuti con gli elementi finiti nella ipotesi semplificativa di lega omogenea senza canalizzazioni di raffreddamento. Per gli sviluppi futuri è quindi necessario rendere il modello dello



B: Steady-State Thermal

Temperature
Type: Temperature
Unit: °C
Time: 1
20/05/2015 01:19

1802.9 Max
1681.4
1559.8
1438.3
1316.7
1195.2
1073.6
952.06 Min



scambio termico più vicino alle necessità prestazionali della pala. E cioè bisognerà inserire nella equazione di bilancio una legge di raffreddamento interna, una forma di sottrazione di calore, funzione delle due coordinate spaziali x ed y .

BIBLIOGRAFIA

1. Arpaci VS. *Conduction Heat Transfer*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley; 1966.
2. Eckert ERG, Drake RM. *Analysis of Heat and Mass Transfer*. New York: Hemisphere Publishing Co.; 1987.
3. Floris F, Ilem B, and Orrù FF. Quasi 1-D analysis of heat equation with exact solutions and comparison with numerical simulation in liquid/vapour pressure tanks, waterwalls and hot drawing machines. Paper presented at: 31st UIT Heat Transfer Conference; 2013 June 25-27; Como, Italy.
4. Carslaw HS, Jaeger JC. *Conduction of Heat in Solids*. 2nd Edition. Oxford: Clarendon Press; 1959.
5. Floris F. et al. Validazione di un modello di simulazione del flusso termico in una giunzione Friction Stir Welded. 1° Congresso Nazionale del Coordinamento della Meccanica Italiana, Palermo, Italy, 20-22 Giugno, 2010.
6. Mazzola P, Cindio di B, Mignoli L, Massini R, Dipollina G, Pedrelli T, et al. Applicazione del metodo agli elementi finiti alla sterilizzazione di omogeneizzato di manzo in scatola.
7. Bunker RS 2007 Gas turbine heat transfer: ten remaining hot gas path challenges. *J. Turbomach.* 129 193-201
8. Alhajeri M and Alhamad Alhajeri H 2009 Heat and fluid flow analysis in gas turbine cooling passages with semicircular turbulators *Int. J. Phys. Sci.* 4 835-45
9. Bredberg J Turbulence modelling for internal cooling of gas-turbine blades Ph.D. Thesis Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2002, ISSN 0346-718X
10. Bhaskaran R and Lele SK 2011 Heat Transfer Prediction in High Pressure Turbine Cascade with Free-Stream Turbulence using LES 41st AIAA Fluid Dynamics Conf. and exhibit (27 – 30 June 2011 U.S. Honolulu Hawaii)
11. Zeng J and Qing X Conjugate flow and heat transfer of turbine cascade China Gas Turbine Establishment, 2007

FIGURA 5 - Restituzione dei dati analitici; Restituzione 3D dei dati analitici; Restituzione 3D FE