Università di Pisa

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Elettronica

Studio e progettazione di un' interfaccia di lettura di sensori inerziali multidimensionali basata su tecniche di modulazione a suddivisione di codice

CANDIDATO
Giovanni Passetti

RELATORE
Prof. Luca Fanucci

Anno Accademico 2011/2012

Alla mia famiglia, per il suo sostegno;
a Piero, per la sua sincera amicizia;
a Claudia, per aver sempre creduto in me.

Indice

Indice **2**

1 Sensori inerziali **6**

1.1 Brevi note storiche 6
1.2 Applicazioni e trend commerciale 10
1.3 Giroscopi 11
1.3.1 Principi fisici 12
1.4 Driving e sensing 15
1.4.1 Sensing risonante e non risonante 19
1.5 Principali parametri per la valutazione delle prestazioni 20
1.6 Sorgenti di errore e non idealità 22
1.6.1 Rumore 22
1.6.2 Bias 23
1.6.3 Esempi di architetture MEMS 26
1.6.3.1 Strutture “framed” 26
1.6.3.2 Architetture torsionali 31
1.6.3.3 Architetture torsionali disaccoppiate 32
1.6.3.4 Giroscopi multidimensionali 33

2 Multiplexing nei sensori multicanale **35**

2.1 Time Division Multiple Access - TDMA 36
2.2 Frequency Division Multiple Access - FDMA 37
2.3 Code Division Multiple Access - CDMA 38
2.3.1 Definizioni e convenzioni usate nella trattazione 38
2.3.2 Segnali a modulazione di codice 40
2.3.2.1 Classificazione 40
2.3.2.2 Funzioni di correlazione di segnali APSK . . . 41

2.3.3 Calcolo delle funzioni di correlazione dei codici 43
2.3.3.1 ACF 43
2.3.3.2 CCF 44
2.3.4 Modulazione e demodulazione *Direct Sequence* (DS) . . 44
2.3.5 Modulazione DS-binaria di un segnale BPSK 45
2.3.6 Segnali spread spectrum 46
2.3.7 Sequenze orientate alla misura dei tempi di propagazione e alla risoluzione temporale 47
2.3.7.1 Campi finiti 48
2.3.7.2 Sequenze binarie di periodo massimo (m-sequences) 51
2.3.7.3 Sequenze di Legendre 52
2.3.8 Costruzione di sequenze per applicazioni CDMA 53
2.3.8.1 Codici di Walsh 53
2.3.8.2 Codici di Gold 54
2.3.8.3 Codici di Kasami 55

3 Interfaccia di readout CDMA per sensori inerziali 57
3.1 Architettura attualmente in uso: SD746 57
3.1.1 Struttura del sensore giroscopico 57
3.1.2 Interfacciamento del sensore 59
3.2 Inquadramento del problema 60
3.3 Considerazioni di dimensionamento e problemi generali 62
3.3.1 Modulazioni di codice per segnali analogici 62
3.3.1.1 Modulazione e demodulazione di un'onda sinusoidale 62
3.3.1.2 Risposta del canale 64
3.3.2 Considerazioni sullo spettro delle sequenze 64
3.3.2.1 Scelta dei codici in base alle caratteristiche spettrali 69
3.3.3 Modello di test 69
3.3.3.1 Impiego di codici ortogonali 72
3.3.3.2 Impiego di codici minimax 78
3.4 Validazione del sistema proposto 83

Bibliografia 89

Introduzione

Disporre di informazioni attinenti al proprio moto è utile per una varietà di oggetti. Si pensi ad esempio ai sistemi di stabilizzazione dell'immagine nelle fotocamere, utilizzati per controbilanciare gli effetti delle vibrazioni cui è soggetta la macchina fotografica durante il tempo di esposizione. I sensori inerziali sono dispositivi in grado di misurare gli spostamenti di un oggetto rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. L'impiego di sensori inerziali in prodotti di tipo consumer quali fotocamere, smartphones, interfacce uomo-macchina, ha raggiunto il livello di pervasività attuale sul mercato grazie all'impiego delle tecnologie microelettroniche per realizzare sensori inerziali di tipo MEMS. Ciò ha reso disponibili sensori facilmente integrabili in dispositivi elettronici portatili, che hanno raggiunto notevoli volumi di produzione, abbattendo i costi del singolo dispositivo. Sono attualmente disponibili strutture microelettromeccaniche in grado di rilevare la velocità angolare rispetto a tre assi indipendenti (giroscopi MEMS triassiali).

In questa tesi viene presa in considerazione la problematica dell'interfacciamento del giroscopio triassiale MEMS integrato nel dispositivo SD746 prodotto da Sensor Dynamics AG, valutando la possibilità di impiegare tecniche di multiplazione a suddivisione di codice (CDMA) per la lettura, su di un singolo canale, dei quattro segnali prodotti in uscita dal sensore. Verranno proposte alcune modifiche all'architettura proprietaria attualmente in uso presso Sensor Dynamics, nella quale l'interfaccia di lettura del sensore si basa su di una multiplazione a divisione di frequenza (FDMA). Si tratterà di esplorare una tecnica di multiplazione tipicamente rivolta a segnali digitali, adattandola a segnali analogici e valutandone le prestazioni. Si rivolgerà particolare attenzione ai disturbi di interferenza mutua tra i segnali multiplati (crosstalk), in relazione ai parametri delle sequenze binarie impiegate per la modulazione. La trattazione è così strutturata:

- **Capitolo 1:** Vengono date alcune informazioni generali sui sensori inerziali, i loro impieghi e la loro evoluzione tecnologica. Vengono brevemente riassunti i principi di funzionamento dei giroscopi, fornendo una classificazione di questi dispositivi ed illustrando alcuni esempi di giroscopi MEMS.

- **Capitolo 2:** Panoramica sulle tecniche di multiplazione dei segnali, con particolare attenzione alla tecnica CDMA. Viene descritta una modulazione di codice *diretta* e si elencano alcune delle diverse classi di codici che possono essere impiegate in questo tipo di modulazione, descrivendo le loro proprietà principali.

- **Capitolo 3:** Descrizione di alcuni aspetti del sensore SD746 non coperti da segreto industriale; dopo una descrizione semplificata dell'architettura attualmente in uso viene proposta una architettura CDMA per l'interfaccia di lettura del sensore. In seguito ad una serie di considerazioni sulle proprietà spettrali di sequenze binarie di impulsi, quali quelle impiegate per la modulazione oggetto di studio, vengono realizzate delle simulazioni impiegando codici diversi, per valori diversi della loro frequenza, dapprima impiegando blocchi Simulink ideali, per poi passare, una volta messo a punto un metodo per l'impostazione dei parametri, all'utilizzo dei blocchi proprietari estratti dal modello dell'SD746. I risultati delle simulazioni vengono commentati facendo riferimento alla configurazione più performante tra quelle testate.

Capitolo 1

Sensori inerziali

Un sensore inerziale è un dispositivo sensibile alle **forze d'inerzia**, le quali compaiono nelle equazioni del moto di un corpo, scritte rispetto ad un sistema di riferimento non inerziale [1].

I sensori inerziali, o "IMU"[2], possono essere realizzati in tecnologie diverse, e vengono impiegati per valutare accelerazione lineare e/o velocità angolare dei sistemi in cui sono inseriti, esprimendole rispetto ad un sistema inerziale assunto come riferimento[3].

All'interno di questa vasta classe di sensori si può operare una prima distinzione tra dispositivi sensibili alla velocità angolare, detti **giroscopi**, e sensori di accelerazione lineare, che prendono il nome di **accelerometri**.

1.1 Brevi note storiche

La storia dei sensori inerziali è relativamente breve, dato che poco o nulla è documentato riguardo a strumenti di questo tipo nella letteratura antecedente al diciannovesimo secolo.

Giroscopi Nel 1817 presso Tübingen, in Germania, Johann Gottfried Friedrich von Bohnenberger realizzò il primo rilevatore di velocità angolare, basato

[1] In un sistema siffatto si identificano come è noto due tipi di forze: le forze *d'interazione* tra i corpi e le forze *apparenti*, o *d'inerzia*.

[2] Inertial Measurement Units

[3] La Terra può essere considerata con ottima approssimazione un sistema inerziale in moltissime applicazioni.

sul principio della trottola; in seguito, intorno al 1830, sono riportati dispositivi analoghi costruiti dall'americano Walter Johnson.

Solo nel 1851, con il famoso esperimento di pendolo di Focault, le forze che verranno successivamente dette *di Coriolis* (dal nome del fisico francese che nel 1835 ne diede una trattazione formale) furono impiegate per una vera e propria misura di velocità angolare: quella della rotazione terrestre. Un pendolo di 67 metri di lunghezza e 28 kg di massa fu lasciato libero di oscillare, osservando nell'arco di 24 ore una rotazione del suo piano di oscillazione pari a $360° \sin(\phi)$, con ϕ angolo di latitudine del Patheon a Parigi, dove fu compiuto l'esperimento.

Nel 1852 Focault realizzò un giroscopio rotante, il cui principio fu brevettato solo nel 1904 da uno storico dell'arte tedesco, Hermann Anschütz-Kämpfe. Il giroscopio in questione si basa su un disco mantenuto in rotazione sospeso da giunti cardanici (figura 1.1); se il sostegno del giroscopio cambia orientamento nello spazio, in virtù delle sospensioni cardaniche il disco può mantenere pressochè costante il proprio momento angolare nel sistema inerziale di riferimento, mentre appare cambiare orientazione ad un osservatore solidale con il giroscopio.

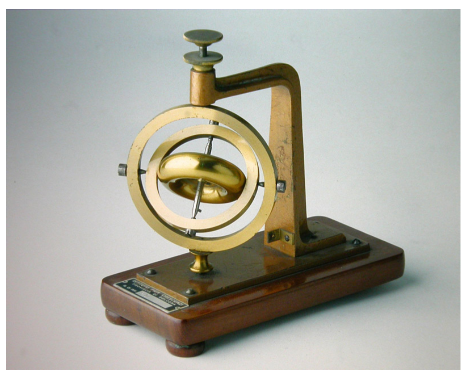


Figura 1.1: Giroscopio a disco rotante.

I giroscopi a disco rotante si diffusero rapidamente su navi e successivamente aerei, e fino agli anni intorno al 1960 si continuarono ad utilizzare dispositivi basati su questo principio.

Negli anni sessanta iniziò un rapido progresso, orientato alla riduzione delle dimensioni e dei costi per i giroscopi, ed emersero soluzioni nuove che vengono oggi impiegate nei giroscopi MEMS [4] (giroscopi basati su corde o gusci vibranti,

[4] Micro Electro-Mechanical Systems

oppure realizzati con diapason). Verso la fine degli anni settanta fu introdotto il giroscopio ottico, che dal 1980 ha dominato nel settore aeronautico ed in altri ambiti di alta precisione.

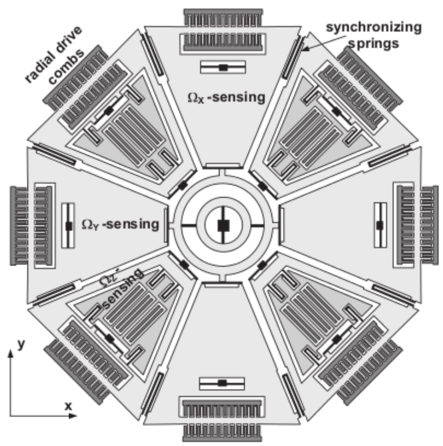


Figura 1.2: Giroscopio MEMS 3D.

Sul fronte dei giroscopi meccanici, la riduzione delle dimensioni è proseguita introducendo gradualmente elementi meccanici realizzati con tecnologia microelettronica, fino alla presentazione, nel 1991, del primo giroscopio realizzato completamente in tecnologia MEMS presso il Charles Draper Laboratory. Da allora l'evoluzione tecnologica ha puntato a migliorare la precisione e l'affidabilità dei giroscopi MEMS, e a ridurne ingombro, peso e consumo di potenza. Il processo di miniaturizzazione ha portato a integrare sullo stesso chip il sensore, il trasduttore, la meccanica e l'elettronica di controllo, l'elaborazione dei segnali di uscita. Oggi iniziano ad essere disponibili giroscopi MEMS tridimensionali, che presentano al proprio interno strutture sempre più elaborate rispetto alla prima generazione monoassiale, consentendo di utilizzare un solo dispositivo per caratterizzare completamente, e con buona precisione, la velocità di rotazione di un sistema.

Accelerometri Forse i primi congegni per i quali si può impiegare il termine «accelerometri» sono gli inneschi di alcuni tipi di bombe usate durante la Prima Guerra Mondiale, che attivavano il detonatore quando l'ordigno subiva una certa accelerazione (dovuta ad esempio ad un urto).

Intorno al 1920 McCollum e Peters realizzarono un accelerometro basato sulla misura di una resistenza deformabile; verso il 1938 iniziarono a diffondersi accelerometri che impiegavano sensori di deformazione (strain-gauges) più avanzati, seguiti negli anni quaranta da dispositivi piezoelettrici e piezoresistivi.

Alla fine degli anni settanta (1979) fu presentato il primo accelerometro realizzato con tecniche MEMS in silicio, in cui la trasduzione avveniva grazie a piezoresistori. Dispositivi di questo tipo hanno iniziato a diffondersi sul mercato 10 anni più tardi, accompagnati dall'introduzione di una varietà di principi di trasduzione diversi: misura di variazioni di capacità, di frequenza, di temperatura, stabilizzazione di una corrente di tunneling, eccetera. La prima applicazione degli accelerometri MEMS che ottenne volumi di produzione elevati fu l'accelerometro 50**g** per l'innesco degli airbag nelle autovetture, realizzato da Analog Devices nel 1993 sviluppando uno speciale processo BiCMOS poi utilizzato per ottenere vari altri sensori inerziali.

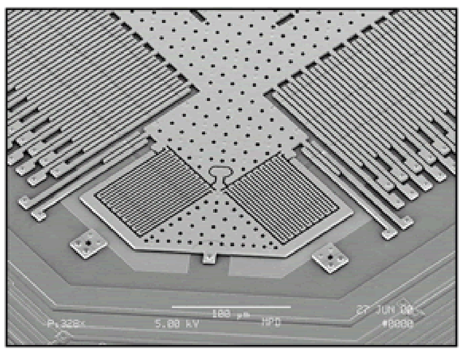


Figura 1.3: Dettaglio al microscopio elettronico di un accelerometro MEMS

Dal momento dell'ingresso sul mercato ad oggi, gli accelerometri MEMS hanno seguito un'evoluzione in termini di affidabilità, sensibilità, ingombro, consumi, e, analogamente a quanto sta accadendo per i giroscopi, sono stati sviluppati trasduttori multidimensionali.

1D-6D IMUs Un sensore inerziale completo dovrebbe rilevare le rotazioni e le accelerazioni rispetto a tre assi di riferimento indipendenti, fornendo in uscita 6 grandezze (3 velocità angolari, 3 accelerazioni); in questo caso si parla di dispositivi 6D, che stanno comparendo sul mercato negli ultimi mesi (SD746). Nell'ottica di garantire una maggiore integrazione, i produttori di MEMS si sono sforzati di incrementare gradualmente il numero di grandezze in grado di essere rilevate dai loro accelerometri e giroscopi, realizzando strutture micromeccaniche via via più complesse, a partire dai primi accelerometri e giroscopi 1D, giungendo agli accelerometri e ai giroscopi 3D per arrivare a sistemi che integrano accelerometro e giroscopio sullo stesso chip per ottenere sensori da 2D a 6D.

1.2 Applicazioni e trend commerciale

Gli impieghi "tradizionali" dei sensori inerziali sono attinenti all'analisi degli effetti delle forze d'inerzia sui sistemi meccanici, e vanno dalla generica misura di vibrazioni, ai sismografi, al rilevamento di urti. I giroscopi hanno avuto per lungo tempo impiego soprattutto nei sistemi di navigazione e per la stabilizzazione di piattaforme.

La versatilità dei prodotti MEMS, dovuta in particolare alle dimensioni ridotte e al facile interfacciamento con i sistemi elettronici, stanno aprendo prospettive commerciali sempre nuove per gli IMU. Ciò si traduce in un progressivo aumento della quota di mercato che essi ricoprono, in relazione al panorama complessivo dei sistemi MEMS.

Nel 2011 il mercato dei MEMS si è attestato intorno ai 12 miliardi di dollari di fatturato, cifra raddoppiata in soli due anni rispetto al 2009; di questo volume di vendite oltre il 20% ha riguardato accelerometri e giroscopi. Una fetta importante del mercato dei sensori inerziali MEMS (80% nel 2005) è assorbita dal settore automobilistico, in cui l'impiego va dai sensori per l'attivazione di airbag e cinture di sicurezza a quelli per il controllo elettronico della stabilità e vari altri sistemi antipattinamento. Negli ultimi anni l'altra parte del mercato "consumer" sta esibendo tassi di crescita annui del 25-30%, grazie all'espansione degli IMU in ambiti fino a poco tempo fa imprevisti. Si pensi per esempio ai sensori per la stabilizzazione di macchine fotografiche, ai sistemi antishock per dischi ottici e magnetici, ai contapassi, al sistema di stabilizzazione dei veicoli Segway. In grande espansione è il settore delle interfacce uomo-macchina, per il controllo di telefoni, videogiochi, tablet: dal 2005 al 2009 il fatturato delle applicazioni "IT" [5] è cresciuto 4.5 volte.

Ci sono alcuni settori di impiego per i quali i sensori inerziali MEMS si stanno avviando a raggiungere grossi volumi di produzione, ma per i quali fino ad oggi la remuneratività dell'investimento per un'azienda produttrice è stata resa

[5] Information Technology

possibile offrendo i prodotti a prezzi più elevati rispetto alla fascia consumer. Si tratta dei settori aeronautico e della difesa, del controllo degli attuatori robotici in ambito industriale, del settore biomedicale. In ambito medico gli IMU possono essere molto utili a monitorare i movimenti del corpo, ad esempio per valutare l'intensità dell'attività fisica di un paziente o trattare disturbi vestibolari.

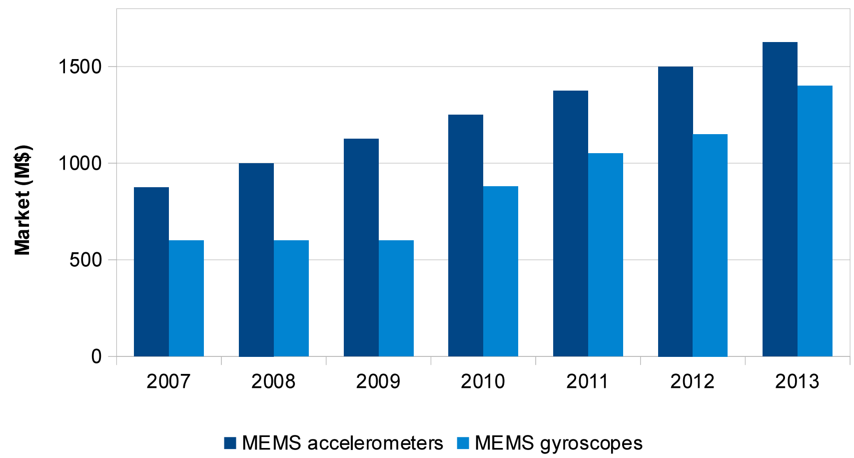


Figura 1.4: Andamento del mercato dei sensori inerziali MEMS negli ultimi anni, con prospettiva fino al 2013.

1.3 Giroscopi

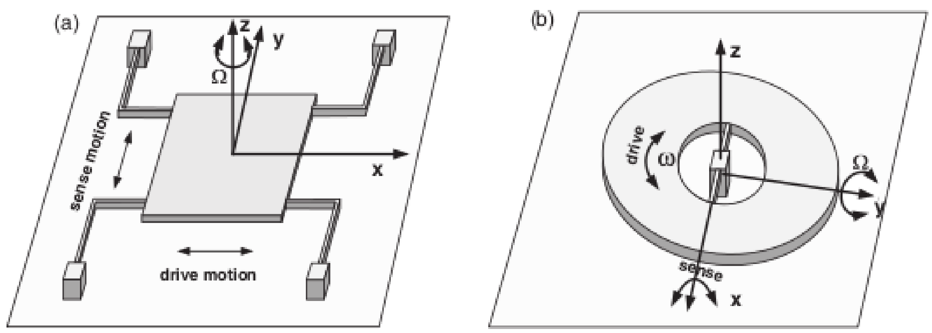
Un giroscopio è un sensore per la misura della velocità angolare di un sistema, rispetto ad uno o più assi di rotazione. In seguito la trattazione sarà rivolta ai soli giroscopi realizzati in tecnologia MEMS, di maggiore attinenza con il presente lavoro di tesi. Si possono individuare due classi principali di giroscopi:

- Giroscopi in grado di misurare direttamente gli angoli di rotazione.
- Giroscopi sensibili alla velocità angolare.

Nel campo dei MEMS la seconda categoria riveste il ruolo primario, anche se sono in corso sforzi nel mondo della ricerca e dell'industria volti ad ottenere prototipi funzionanti di giroscopi del primo tipo.

1.3.1 Principi fisici

All'interno della stragrande maggioranza dei giroscopi MEMS si ritrovano sistemi meccanici vibranti di complessità variabile, la cui architettura è basata sulle due strutture elementari di figura 1.5a e 1.5b. Si tratta di strutture che, grazie ad un opportuno sistema di sospensioni, possono oscillare con due gradi di libertà rispetto al substrato del dispositivo; in figura 1.5a (struttura *lineare*) le oscillazioni avvengono lungo una direzione costante rispetto al substrato, mentre in figura 1.5b (struttura *torsionale*) si hanno oscillazioni torsionali.



(a) Struttura lineare

(b) Struttura torsionale

Figura 1.5: Strutture micromeccaniche elementari all'interno dei giroscopi MEMS

Struttura lineare Consideriamo l'oggetto di figura 1.5a; il giroscopio ruota su se stesso con una certa velocità angolare $\vec{\Omega}'$ nel sistema inerziale $\hat{X}\,\hat{Y}\,\hat{Z}$. Operando un cambiamento di base si può esprimere $\vec{\Omega}'$ come $\vec{\Omega}$ nel sistema i cui versori $\hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}$ sono solidali al substrato: detta S la matrice di rotazione che allinea $\hat{X}\,\hat{Y}\,\hat{Z}$ con $\hat{x}\,\hat{y}\,\hat{z}$ si può scrivere $\vec{\Omega} = \mathbf{S}\vec{\Omega}'$. Per ciascun grado di libertà il sistema può essere studiato come un oscillatore del tipo massa-molla-smorzatore (figura 1.6).

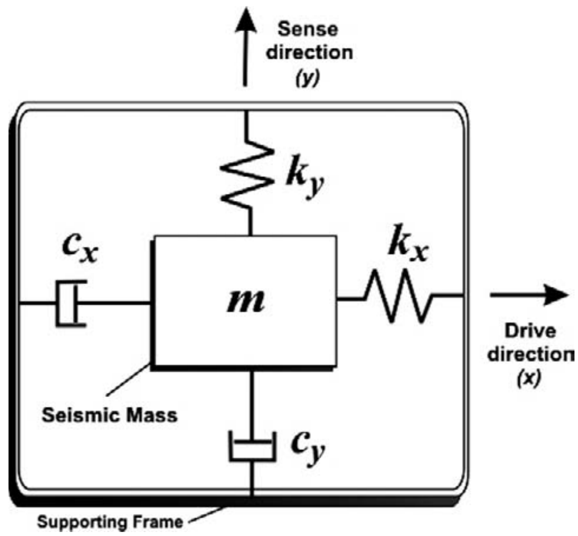


Figura 1.6: Modello dinamico del sistema vibrante con due gradi di libertà

Assumendo che il centro di massa del sistema complessivo (massa vibrante + substrato) non subisca accelerazioni, e che le sospensioni siano perfettamente rigide nella direzione $\hat{z}$ ortogonale alla piattaforma, posta $\vec{F}$ la risultante delle forze agenti sulla massa m, incluse quelle d'inerzia:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + k_x x = F_x \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + k_y y = F_y \end{cases} \tag{1.1}$$

Andando a distinguere con il pedice A le forze generate dagli attuatori installati sul substrato dai contributi di molla, smorzamento ed inerzia, le 1.1 diventano:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c_x\dot{x} + \left[k_x - m\left(\Omega_y^2 + \Omega_z^2\right)\right] x = 2m\Omega_z\dot{y} - my\left(\Omega_x\Omega_y - \dot{\Omega}_z\right) + F_{Ax} \\ m\ddot{y} + c_y\dot{y} + \left[k_y - m\left(\Omega_x^2 + \Omega_z^2\right)\right] y = -2m\Omega_z\dot{x} - mx\left(\Omega_y\Omega_x - \dot{\Omega}_z\right) + F_{Ay} \end{cases} \tag{1.2}$$

Poste $\omega_x = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$, $\omega_y = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$ le pulsazioni naturali del sistema lungo i rispettivi assi, se $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z \ll \omega_x, \omega_y$ e se si può trascurare l'eventuale accelerazione angolare $\dot{\vec{\Omega}}$ della piattaforma, le 1.2 possono essere scritte come:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2c_x\dot{x} + m\omega_x^2 x = 2m\Omega_k\dot{y} + F_{Ax} + \tilde{n}_x \\ m\ddot{y} + 2c_y\dot{y} + m\omega_y^2 y = -2m\Omega_z\dot{x} + F_{Ay} + \tilde{n}_y \end{cases} \tag{1.3}$$

in cui le componenti di $\tilde{\vec{n}}$ tengono conto di varie non idealità della struttura (ad esempio la non perfetta rigidità delle sospensioni in direzione $\hat{z}$). L'unico contributo non trascurabile delle forze d'inerzia nelle equazioni 1.3 è la "forza di Coriolis" $\vec{F}_{Co}$, ortogonale alla velocità relativa di m rispetto alla piattaforma, e ad essa proporzionale:

$$\vec{F}_{Co} = 2m\Omega_z \dot{y}\hat{x} - 2m\Omega_z \dot{x}\hat{y} \tag{1.4}$$

Struttura torsionale In modo analogo a quanto appena fatto per la struttura vibrante lineare, si possono ricavare le equazioni relative al sistema meccanico torsionale di figura 1.5b, ottenendo ancora un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in cui le incognite sono gli angoli di rotazione della massa vibrante rispetto al substrato. Poniamo $\vec{r}$ il vettore che identifica un punto qualsiasi all'interno del volume V del disco vibrante, nel sistema di riferimento $x\,y\,z$ della piattaforma; $\mathbf{J}$ è il tensore d'inerzia del disco, rappresentato nel medesimo sistema di riferimento dalla matrice simmetrica 3×3:

$$\mathbf{J} = \int_V (\vec{r} \cdot \vec{r})\,\mathbf{I} - \mathbf{T}\,\mathrm{d}m \tag{1.5}$$

in cui:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

Si definisce inoltre il *momento d'inerzia diadico*:

$$\mathbf{J}^{\mathrm{D}} = \int_V \mathbf{T}\,\mathrm{d}m \tag{1.7}$$

Se il giroscopio sta compiendo una rotazione arbitraria su se stesso, con velocità angolare $\vec{\Omega}'$ rispetto a $\hat{X}\,\hat{Y}\,\hat{Z}$ (inerziale), ad ogni istante nel sistema x, y, z vale l'equazione:

$$\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} + 2\left(\mathbf{J}^{\mathrm{D}}\vec{\Omega} \times \vec{\omega}\right) + \vec{\omega} \times \mathbf{J}\vec{\omega} + \vec{\Omega} \times \mathbf{J}\vec{\Omega} + \mathbf{J}\dot{\vec{\Omega}} = \vec{M} \tag{1.8}$$

In cui $\vec{M}$ rappresenta il momento complessivo esercitato sul disco vibrante, mentre il termine $2\left(\mathbf{J}^{\mathrm{D}}\vec{\Omega} \times \vec{\omega}\right)$ prende il nome di "momento di Coriolis".

Nella pratica le strutture mobili all'interno di un giroscopio vengono realizzate in modo da essere simmetriche rispetto agli assi di rotazione, per far sì che essi siano "assi principali", nel qual caso $\mathbf{J}$ e $\mathbf{J}^{\mathrm{D}}$ sono matrici diagonali:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{J}^{\mathrm{D}} = \begin{pmatrix} J_x^D & 0 & 0 \\ 0 & J_y^D & 0 \\ 0 & 0 & J_z^D \end{pmatrix}$$

La 1.8 diviene allora:

$$\begin{cases} J_x\dot{\omega}_x - 2J_z^{\mathrm{D}}\Omega_z\omega_y + 2J_y^{\mathrm{D}}\Omega_y\omega_z + \left(J_y^{\mathrm{D}} - J_z^{\mathrm{D}}\right)(\omega_y\omega_z + \Omega_y\Omega_z) + J_x\dot{\Omega}_x = M_x \\ J_y\dot{\omega}_y + 2J_z^{\mathrm{D}}\Omega_z\omega_x - 2J_x^{\mathrm{D}}\Omega_x\omega_z - \left(J_x^{\mathrm{D}} - J_z^{\mathrm{D}}\right)(\omega_x\omega_z + \Omega_x\Omega_z) + J_y\dot{\Omega}_y = M_y \\ J_z\dot{\omega}_z - 2J_y^{\mathrm{D}}\Omega_y\omega_x + 2J_x^{\mathrm{D}}\Omega_x\omega_y + \left(J_x^{\mathrm{D}} - J_y^{\mathrm{D}}\right)(\omega_x\omega_y + \Omega_x\Omega_y) + J_z\dot{\Omega}_z = M_z \end{cases} \tag{1.9}$$

Distinguendo in $\vec{M}$ il contributo $\vec{M}_A$ degli attuatori installati nel dispositivo da quelli di molla e frizione del sistema meccanico, riorganizzando le 1.9 e sostituendo $\vec{\omega}$ con $\dot{\vec{\theta}}$ si ottiene:

$$\begin{cases} J_x\ddot{\theta}_x + c_{\theta x}\dot{\theta}_x + k_{\theta x}\theta_x = -2J_y^{\mathrm{D}}\Omega_y\dot{\theta}_z + 2J_z^{\mathrm{D}}\Omega_z\dot{\theta}_y + M_{Ax} \\ J_y\ddot{\theta}_y + c_{\theta y}\dot{\theta}_y + k_{\theta y}\theta_y = 2J_x^{\mathrm{D}}\Omega_x\dot{\theta}_z - 2J_z^{\mathrm{D}}\Omega_z\dot{\theta}_x + M_{Ay} \\ J_z\ddot{\theta}_z + c_{\theta z}\dot{\theta}_z + k_{\theta z}\theta_z = -2J_x^{\mathrm{D}}\Omega_x\dot{\theta}_y + 2J_y^{\mathrm{D}}\Omega_y\dot{\theta}_x + M_{Az} \end{cases} \tag{1.10}$$

È possibile semplificare ulteriormente il sistema 1.10 se la sospensione impedisce al disco di oscillare intorno all'asse $\hat{y}$, per cui $\theta_y = 0$, quindi:

$$\begin{cases} J_x\ddot{\theta}_x + c_{\theta x}\dot{\theta}_x + k_{\theta x}\theta_x = -2J_y^{\mathrm{D}}\Omega_y\dot{\theta}_z + M_{Ax} \\ J_z\ddot{\theta}_z + c_{\theta z}\dot{\theta}_z + k_{\theta z}\theta_z = +2J_y^{\mathrm{D}}\Omega_y\dot{\theta}_x + M_{Az} \end{cases} \tag{1.11}$$

Il sistema 1.11 è perfettamente analogo al 1.3, e consente quindi di risalire a $\omega_z = \dot{\theta}_z$ una volta imposta $\dot{\theta}_x$.

1.4 Driving e sensing

I blocchi base di un giroscopio vibrante MEMS sono sempre i seguenti:

ATTUAZIONE (driving): Attuatori, tipicamente elettrostatici di tipo comb-drive, che creano un campo di velocità per una o più masse mobili rispetto al substrato.

RILEVAMENTO (sensing): Accelerometri in grado di rilevare gli effetti delle forze d'inerzia sulla massa vibrante, in modo da risalire alla velocità angolare.

La gran parte dei dispositivi è realizzata componendo all'interno della struttura micromeccanica due o più masse, ciascuna avente con buona approssimazione un solo grado di libertà rispetto al substrato. Astraendo dalla peculiare struttura delle masse e delle sospensioni, sistemi di questo tipo si possono studiare come oscillatori meccanici (sistemi massa-molla-smorzatore) impiegando equazioni come quelle dei sistemi 1.2 e 1.8.

Si consideri la prima equazione del sistema 1.1, relativo alla struttura lineare di figura 1.5a:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_{Ax}(t) \tag{1.12}$$

che può essere scritta nella forma:

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_{Ax}(t)}{m} \tag{1.13}$$

con

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.14}$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_n} \tag{1.15}$$

Nel dominio di Laplace la funzione di trasferimento dell'oscillatore risulta:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{m}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{1.16}$$

In un giroscopio MEMS ad effetto Coriolis gli attuatori generano forze con un andamento armonico nel tempo lungo l'asse di driving, del tipo:

$$F_{Ax} = F_D = F_0 \cos(\omega_F t) \tag{1.17}$$

per cui la risposta forzata del sistema si può in generale scrivere nella forma:

$$x = x_0 \cos(\omega_F t + \phi) \tag{1.18}$$

con

$$x_0 = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega_F}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + \left[2\xi\frac{\omega_F}{\omega_n}\right]^2}} \tag{1.19}$$

$$\phi_D = \arctan\frac{2\xi\frac{\omega_F}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega_F}{\omega_n}\right)^2} \tag{1.20}$$

Il massimo della risposta, $x_{0\,\max}$, si ottiene in corrispondenza della pulsazione di risonanza:

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2} \tag{1.21}$$

Per $\omega_F = \omega_n$ si ha

$$x_0 = \frac{F_0}{2k\xi} = \frac{F_0}{c_x\omega_n} = Q_x\frac{F_0}{k}$$

dove $Q_x = \frac{1}{2\xi} = \frac{m\omega_n}{c_x}$ è il fattore di qualità dell'oscillatore.

Per sistemi in cui $\xi \ll 1$ (condizione tipica nei giroscopi) si può considerare $\omega_r \approx \omega_n$, ed assumere quindi come ampiezza massima dell'oscillazione il valore di x_0 calcolato per $\omega_F = \omega_n$:

$$x_{0\,\max} \approx \frac{F_0}{2k\xi} = \frac{F_0}{c\omega_n} = Q\frac{F_0}{k} \tag{1.22}$$

Supponiamo di poter trascurare il contributo di $\dot{y}$ nella prima delle 1.3; in tal caso a regime:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_F t - \phi_D) \tag{1.23}$$

Per $\omega_F = \omega_n$ risulta:

$$\begin{array}{c} \phi_D = \frac{\pi}{2} \\ x_{0\,\max} = \frac{F_0}{m_D+m_S}\frac{Q_x}{\omega_x^2} \end{array} \tag{1.24}$$

Valori tipici per $x_{0\,\max}$ vanno da alcuni μm a 20 μm.

È chiaro che per massimizzare la risposta del sistema alle sollecitazioni di driving è opportuno che la vibrazione sia indotta intorno alla frequenza di risonanza $\approx 2\pi\omega_x$, nell'ottica di ridurre l'intensità delle forze che devono essere generate, e quindi minimizzare peso, ingombro e tensioni di alimentazione degli attuatori. La stabilizzazione dell'ampiezza dell'oscillazione di driving è affidata ad un sistema retroazionato positivamente, che controlla gli attuatori in modo da mantenere il più possibile fisso alla frequenza di risonanza il punto di lavoro dell'oscillatore. Il fattore di qualità Q_x cresce al diminuire del coefficiente di smorzamento, il che fornisce un parametro su cui agire per aumentare $x_{0\,\max}$.

Applicando l'analisi di Fourier al sistema 1.3, si ottengono le risposte in frequenza:

$$\begin{cases} H_D(\jmath\omega) = \frac{X(\jmath\omega)}{F_D(\jmath\omega)} = \frac{1}{\omega_x^2-\omega^2+2\jmath\frac{c_x}{m_D+m_S}\omega} = |H_D(\jmath\omega)|\, e^{-\jmath\phi_D} \\ H_S(\jmath\omega) = \frac{Y(\jmath\omega)}{F_{Ay}(\jmath\omega)} = \frac{1}{\omega_y^2-\omega^2+2\jmath\frac{c_y}{m_S}\omega} = |H_S(\jmath\omega)|\, e^{-\jmath\phi_S} \end{cases} \tag{1.25}$$

in cui

$$\begin{array}{cc} |H_D(\jmath\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_x^2-\omega^2)^2+4\left(\frac{c_x}{m_D+m_S}\right)^2\omega_x^2\omega^2}} & \phi_D = \arctan\left(\frac{2c_x\omega_x\omega}{(m_D+m_S)(\omega_x^2-\omega^2)}\right) \\ |H_S(\jmath\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(\omega_y^2-\omega^2)^2+4\left(\frac{c_y}{m_S}\right)^2\omega_y^2\omega^2}} & \phi_S = \arctan\left(\frac{2c_y\omega_y\omega}{m_S(\omega_y^2-\omega^2)}\right) \\ Q_x = \frac{m}{2c_x} & Q_y = \frac{m}{2c_y} \end{array} \tag{1.26}$$

Risolvendo il sistema 1.3 è possibile ricavare $y(t)$, che se $F_{Ay} = 0$ rappresenta la risposta del sistema lungo l'asse di sensing alla forza di Coriolis. Se il sistema

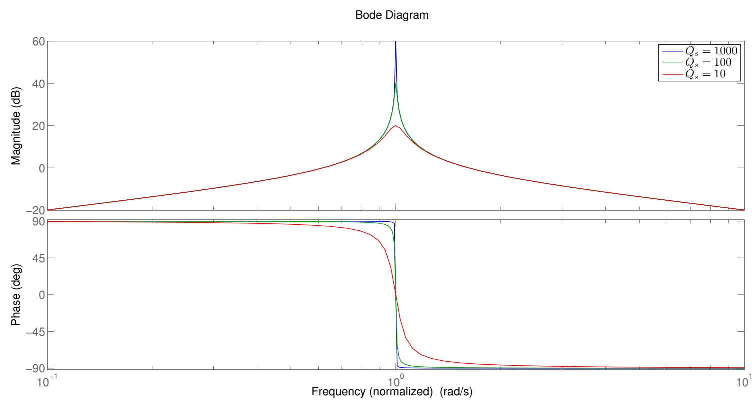


Figura 1.7: Risposta in frequenza di un sistema meccanico risonante del secondo ordine, valutata per diversi valori del fattore di qualità Q_s.

è mantenuto in movimento lungo l'asse di driving secondo la legge 1.23, allora $-2\Omega_z \dot{x} = 2\Omega_z x_0 \omega_F \sin(\omega_F t - \phi_D)$, e quindi a regime, dalle 1.3 e 1.26:

$$y(t) = 2x_0\omega_F \left|H_S(\jmath\omega_F)\right| \Omega_z \sin(\omega_F t - \phi_D - \phi_S) \tag{1.27}$$

Si tratta di un segnale modulato in ampiezza a portante soppressa, nel quale il coefficiente $2x_0\omega_F|H_S(\jmath\omega_F)|$ prende il nome di *sensibilità meccanica*; $y(t)$ viene tipicamente sottoposto a demodulazione sincrona (figura 1.8) per ricavare il valore di Ω_z.

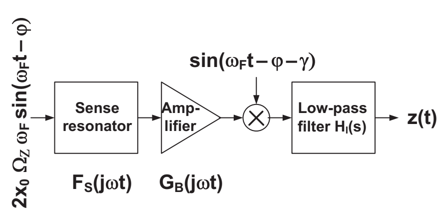
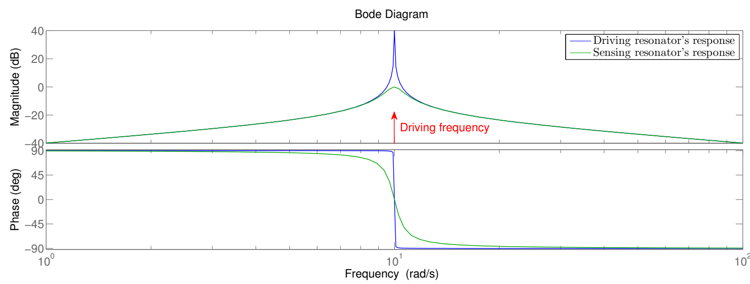
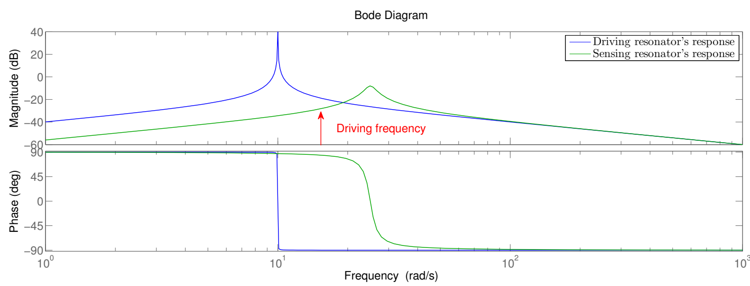


Figura 1.8: Schema funzionale di un demodulatore sincrono.

A seconda della posizione relativa dei picchi di risonanza di H_D e H_S, si distinguono le due modalità di lettura di sensori di questo tipo: con **sensing risonante** e con **sensing non risonante**.



(a) Sensing risonante



(b) Sensing non risonante

Figura 1.9: Confronto tra le due modalità di pilotaggio e lettura dei giroscopi vibranti

1.4.1 Sensing risonante e non risonante

Si parla di **sensing risonante** nel caso in cui la frequenza della sollecitazione di driving coincida con la frequenza di risonanza del sistema lungo entrambi gli assi, di driving e sensing. In tal caso il sensore presenta un'elevata sensibilità, poichè l'oscillazione di sensing è esaltata dalla risonanza della struttura (figura 1.9). Si hanno tuttavia notevoli svantaggi in termini di banda, da cui deriva, oltre ad un vincolo sul contenuto frequenziale dei segnali che possono essere letti, anche una minore "robustezza" del sensore nei confronti delle variazioni dei parametri che ne influenzano la sensibilità.

Ad esempio, si immagini una frequenza di risonanza di 10kHz lungo l'asse di sensing, con un fattore di qualità $Q_S = 1000$; in corrispondenza del picco di risonanza l'uscita viene amplificata di un fattore 1000. Tuttavia, uno scostamento in frequenza tra ω_x ed ω_y di appena 5Hz si traduce in una riduzione del 29.3% del guadagno, e quindi della sensibilità del sistema, mentre per uno scostamento di 10 Hz si ha una riduzione del 55 %.

Sono molti i fattori che rendono estremamente complicato garantire buone condizioni di "matching" tra l'oscillatore di driving e quello di sensing, a causa ad esempio degli inevitabili difetti di costruzione, delle derive termiche, dell'invecchiamento. Anche se l'introduzione di un controllo in retroazione sul movimento di sensing consentirebbe in linea di principio di trarre vantaggio dall'elevata sensibilità ottenibile con il sensing risonante, questa soluzione non è esente da difficoltà implementative notevoli.

Oltre alla posizione del picco di risonanza lungo l'asse delle frequenze, lo stesso valore che la risposta in frequenza assume in tale punto è soggetto a derive significative, dovute al variare del coefficiente di smorzamento c_y. Calcolando dalle 1.26 la derivata di H_S rispetto al coefficiente di smorzamento, si può notare come la dipendenza da c_y sia massima proprio in corrispondenza della pulsazione di risonanza.

Per i motivi suddetti si predilige solitamente operare un sensing *non risonante*, facendo in modo che gli oscillatori di driving e di sensing presentino picchi di risonanza separati in frequenza, e sollecitando la struttura con un segnale di driving a frequenza intermedia tra i due.

Nel caso del sensing non risonante tra le due frequenze di risonanza degli assi di driving e sensing intercorre un intervallo Δf, come in figura 1.9b. Poichè l'oscillazione primaria del sistema (driving) ha frequenza al di fuori dei picchi di risonanza, la risposta complessiva del sistema è attenuata rispetto al caso risonante, ma il sensore è molto più robusto rispetto a tutti gli effetti dovuti alle variazioni delle frequenze in gioco (frequenza di driving, posizione dei picchi). Infatti, allontanandosi dal picco di risonanza, le risposte in frequenza variano più lentamente, oltre ad essere minore la dipendenza dal fattore di qualità Q, ovvero dallo smorzamento c. Per aumentare il guadagno vengono di solito realizzate strutture con fattori di qualità elevati. Talvolta il coefficiente di smorzamento viene mantenuto ad un valore apprezzabile per rendere il sistema meno sensibile alle vibrazioni, e ciò limita superiormente i fattori di qualità ottenibili.

1.5 Principali parametri per la valutazione delle prestazioni

Di seguito sono elencati alcuni dei parametri elaborati dall' IEEE con lo scopo di fornire un metro di valutazione delle caratteristiche dei giroscopi MEMS:

Scale factor: Indica un insieme di parametri oltre al valore nominale riferiti alla ***sensibilità*** del dispositivo, espressa in $\frac{mV}{°/s}$ e misurata come pendenza della retta di fitting della caratteristica ingresso/uscita del dispositivo ottenuta con il metodo dei minimi quadrati.

Errore: scostamento tra la retta di fitting e i valori misurati della caratteristica, espresso generalmente come percentuale della dinamica di ingresso o di quella di uscita.

Non linearità: errore sistematico rispetto alla retta di fitting.

Dipendenza dalla temperatura: cambiamento della sensibilità in funzione dello scostamento dalla temperatura nominale di esercizio.

Dipendenza dall'accelerazione: cambiamento della sensibilità in funzione dell'accelerazione angolare.

Errori di asimmetria: differenza tra i moduli dell'uscita per un certo valore di velocità angolare e per il suo opposto, in percentuale della dinamica d'ingresso

Stabilità: variazione della sensibilità durante un certo arco di tempo in condizioni operative specificate.

Bias (zero rate output): Ricadono in questa specifica l'***offset*** nominale del sensore ed alcuni parametri di stabilità dello stesso. Per offset si intende la media della velocità angolare misurata in determinate condizioni di funzionamento ed un certo intervallo di tempo in assenza di moto rotatorio; viene indicato generalmente in °/s o °/hr.

Random drift rate: variazione casuale dell'offset, generalmente espressa in termini delle componenti di *Allan variance*:

1. Angle random walk
2. Bias instability
3. Rate random walk

Environmentally sensitive drift rate: parametri di dipendenza dell'offset del sensore dalle mutevoli condizioni dell'ambiente operativo. (Ad esempio isteresi termica).

Operating range: Indica i limiti dell'intervallo di velocità angolari per le quali il dispositivo non satura (dinamica d'ingresso).

Risoluzione: Viene definita come il minimo valore dell'ingresso, al di sopra della soglia di rumore, che garantisce un effetto sull'uscita pari almeno al 50% dell'ingresso moltiplicato per il valore nominale della sensibilità.

Banda: La banda del giroscopio è generalmente fornita come il suo valore a -3dB, oppure sotto forma di funzione di trasferimento o di risposta in frequenza.

Tempo di accensione: Il tempo necessario al dispositivo, una volta alimentato, a fornire un segnale di uscita utile, anche se non ancora al livello di accuratezza garantito per il funzionamento a regime.

Sensibilità alle vibrazioni lineari ed angolari: Rapporto tra l'ampizza del segnale in uscita prodotto da oscillazioni del giroscopio rispetto ad un asse di misura, e l'ampiezza di tali oscillazioni.

Resistenza agli urti: Esprime la capacità del dispositivo di non interrompere il proprio funzionamento, in modo temporaneo o permanente (rottura), a seguito di urti.

Altri parametri importanti per il sensore possono essere, in base alle applicazioni, il tempo di vita medio del dispositivo, la compatibilità elettromagnetica, gli effetti dell'umidità.

1.6 Sorgenti di errore e non idealità

Sono numerosi i fattori che concorrono a deteriorare le prestazioni di un giroscopio MEMS, legati essenzialmente a difetti costruttivi, rumore dei dispositivi elettronici di interfaccia, aleatorietà dei parametri meccanici del sistema (rumore meccanico browniano).

1.6.1 Rumore

Si distinguono due contributi di rumore che deteriorano la risoluzione di un giroscopio: il rumore meccanico **browniano**, legato allo smorzamento, ed il rumore **elettronico** nelle sue diverse componenti, introdotto dal trasduttore e dai successivi stadi di amplificazione del segnale.

Il rumore browniano è originato dall'interazione delle parti mobili del sensore con le particelle dell'atmosfera all'interno del dispositivo, interazioni che presentano un andamento stocastico ma che diventano sempre più significative al crescere della pressione del gas, e conseguentemente del valore del coefficiente di smorzamento.

La densità spettrale di potenza del rumore meccanico browniano risulta, in analogia con il rumore termico nei dispositivi elettronici:

$$S_B = 4kTc \tag{1.28}$$

con k costante di Boltzmann, T temperatura assoluta, c coefficiente di smorzamento.

Considerando solo il contributo di rumore dovuto all'oscillatore di sensing, esso sarà in prima approssimazione lo stesso sia in caso di sensing risonante che non; inoltre presenterà uno spettro in banda passante, tanto più concentrato intorno alla frequenza di risonanza quanto più è elevato il fattore di qualità Q_S.

Il disturbo legato al rumore browniano può allora essere considerato come un'oscillazione sinusoidale alla frequenza di risonanza ω_S, caratterizzata da un andamento stocastico dell'ampiezza e della fase. In prima approssimazione si ricava che il contributo del rumore meccanico equivale ad avere in ingresso una velocità angolare la cui ampiezza è espressa dalla 1.29:

$$\tilde{\Omega}_{Br} = \frac{1}{x_0 \omega_S} \sqrt{\frac{8kT \frac{c_S}{2m_S} \omega_S \Delta f}{m_S}} \tag{1.29}$$

Questo fatto costituisce un vantaggio del sensing non risonante, poichè consente di reiettare il disturbo con un filtro elettronico, lasciando passare il segnale utile, centrato ad un'altra frequenza.

1.6.2 Bias

Ogni giroscopio MEMS viene sottoposto ad una fase di post-processing in cui viene calibrato, con lo scopo di ridurre il più possibile l'errore sistematico sulle misure. Tale errore, detto anche bias o, con un termine specifico per questo tipo di sensori, *zero-rate output*, è soggetto ad una moltitudine di fattori che tendono a conferigli comunque scarsa stabilità dopo la calibrazione, tra cui: variazioni di temperatura, invecchiamento delle sospensioni, derive degli oscillatori elettronici impiegati per la demodulazione, offset dei blocchi elettronici per il trattamento del segnale.

Si distinguono due componenti per l'offset meccanico dei giroscopi vibranti:

- *R-bias*: componente indesiderata dell'oscillazione di sensing in fase con la forza di Coriolis.
- *Q-bias*: componente in quadratura con la forza di Coriolis. L'effetto di questa componente sull'uscita può essere completamente soppresso se la fase dell'oscillatore impiegato per demodulare il segnale di sensing è impostata correttamente.

Le equazioni del sistema 1.3 rappresentano una notevole semplificazione della dinamica di un giroscopio vibrante con due gradi di libertà. Un modello più realistico deve tenere conto per lo meno degli effetti di interazione mutua tra l'oscillazione di driving e quella di sensing legati ad asimmetrie e non idealità della struttura. Pur continuando a considerare lineare il sistema, e quindi approssimando con valori costanti i coefficienti di smorzamento e le costanti elastiche in gioco, un modello più accurato è espresso dall'equazione:

$$\mathbf{M}\ddot{\vec{r}} + \mathbf{C}\dot{\vec{r}} + \mathbf{K}\vec{r} = 2\tilde{\mathbf{\Omega}}\mathbf{M}\dot{\vec{r}} + \vec{F} + \vec{N}_B \tag{1.30}$$

in cui:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \qquad \vec{N}_B = \begin{pmatrix} N_{Bx} \\ N_{By} \end{pmatrix} \qquad \tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_z \\ -\Omega_z & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y \end{pmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_x & c_{xy} \\ c_{yx} & c_y \end{pmatrix} \qquad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} k_x & k_{xy} \\ k_{yx} & k_y \end{pmatrix}$$

- La matrice delle masse, M, è una matrice simmetrica che tiene conto di asimmetrie nel comportamento dinamico del sistema rispetto ai due assi di oscillazione; nel caso di strutture con più masse vincolate ad oscillare in modo diverso, come nel caso delle architetture "framed" che saranno citate più avanti, m_x ed m_y possono essere intenzionalmente diverse, e riferirsi rispettivamente ad una massa libera di oscillare lungo l'asse di sensing, o "massa di sensing" e ad una "massa di driving".
- La matrice **C** è la matrice dei coefficienti di smorzamento, in cui compaiono anche termini che indicano interdipendenza tra le velocità lungo i due assi nel determinare lo smorzamento complessivo.
- La matrice **K** tiene conto del non perfetto allineamento delle molle lungo gli assi e dei difetti della loro geometria.

Assumendo M $= \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$, e le matrici K e C simmetriche, si può porre:
$\omega_0^2 = \frac{(\omega_x^2+\omega_y^2)}{2}$, $\Delta = \frac{(\omega_x^2-\omega_y^2)}{2}$, $\frac{k_{xy}}{m} = \frac{k_{yx}}{m} = \gamma_{xy}\omega_y^2 = \gamma_{yx}\omega_x^2$, $\gamma_{xy} = \frac{k_{xy}}{k_y} \neq \gamma_{yx} = \frac{k_{xy}}{k_x}$, $D_x = \frac{c_x}{m}$, $D_y = \frac{c_y}{m}$, $D_{xy} = \frac{c_{xy}}{m}$ In definitiva il sistema 1.3 può riscriversi come:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\Omega\dot{y} = \frac{F_x}{m} - D_x\dot{x} - D_{xy}\dot{y} - \Delta x - \gamma_{yx}\omega_x^2 y \\ \ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\Omega\dot{x} = \frac{F_y}{m} - D_y\dot{y} - D_{xy}\dot{x} + \Delta y - \gamma_{xy}\omega_y^2 x \end{cases} \tag{1.31}$$

La 1.31 resta valida per qualunque giroscopio vibrante lineare a due gradi di libertà, e può essere adattata al caso di sistemi torsionali sostituendo alla matrice delle masse il momento d'inerzia e alla forza di Coriolis l'omonimo momento.

In generale le masse sospese rispetto al substrato non compiono oscillazioni perfettamente parallele a quest'ultimo, il moto di driving e quello di sensing non sono perfettamente ortogonali, ed il centro di massa delle strutture mobili non si trova esattamente al centro della sospensione. Tutti questi elementi contribuiscono a fare in modo che, anche in caso di velocità di rotazione nulla (zero-rate), sia rilevata un'oscillazione con ampiezza diversa da zero lungo l'asse di sensing. Tale oscillazione può essere sempre scomposta in una componente in fase con la forza di Coriolis ed una in quadratura, la seconda delle quali è completamente reiettata impiegando un'onda di fase opportuna (in quadratura con l'oscillazione di driving) per demodulare il segnale DSB prodotto dal sensore.

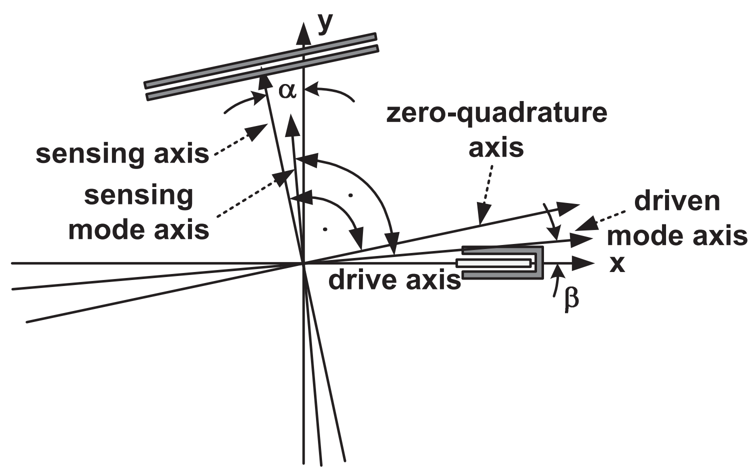


Figura 1.10: Rappresentazione schematica degli errori dovuti al disallineamento degli assi e ai difetti delle sospensioni: l'asse lungo il quale oscilla, per segnale di ingresso nullo, la massa sismica (driven mode axis), è disallineato rispetto agli attuatori (drive-axis). A sua volta l'oscillazione indotta dal segnale di driving non avviene lungo l'asse (zero-quadrature axis) ortogonale a quello di massima sensibilità degli elettrodi di sensing, mentre ques'ultimo asse non è ortogonale all'asse di driving previsto dal progettista, nè a quello effettivo

1.6.3 Esempi di architetture MEMS

Di seguito vengono descritti sommariamente alcuni esempi di strutture micromeccaniche per giroscopi MEMS.

1.6.3.1 Strutture "framed"

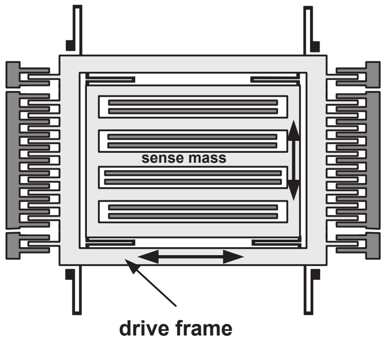
Per trattare un giroscopio vibrante lineare a singolo asse si è fatto finora riferimento al modello di figura 1.5a, che rappresenta un oggetto con due gradi di libertà dove è presente una sola massa mobile, a cui le sospensioni devono consentire spostamenti in due direzioni. Nella pratica si impiegano strutture realizzate con più masse combinate tra loro, ciascuna vincolata ad oscillare con un singolo grado di libertà rispetto al substrato. Lo scopo è principalmente quello di minimizzare i trasferimenti di energia tra le oscillazioni di driving e sensing non dovuti alla forza di Coriolis, ma derivanti da asimmetrie ed altri difetti costruttivi della struttura. Inoltre si tende ad attenuare l'effetto delle stesse forze di Coriolis sull'oscillazione di driving, la quale deve dipendere il più possibile soltanto dalle forze generate dagli attuatori.

Nelle architetture **framed** il disaccoppiamento tra i modi di driving e sensing si realizza disponendo le masse sismiche una intorno all'altra, collegate tra loro o con il substrato attraverso sospensioni monodimensionali. Oltre al numero di masse oscillanti, e quindi di gradi di libertà (minimo due), i giroscopi di questo tipo si distinguono soprattutto in base alla posizione e al tipo di sospensione della massa di driving (figura 1.11).

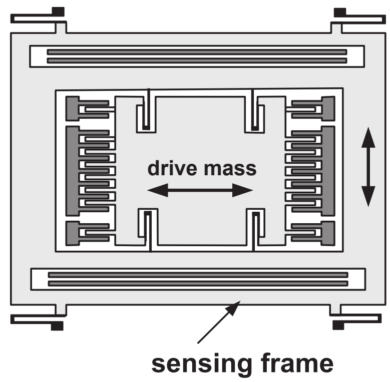
Qualora il segnale di driving sia applicato alla massa più interna, e di conseguenza l'oscillazione di sensing venga rilevata per le masse circostanti, si parla di architetture *sensing-frame-based*; viceversa, se ad essere attuata è una delle masse che "incorniciano" la massa più interna (che in questo caso è la massa di sensing), il sistema si definisce *drive-frame-based*. La massa di driving può in entrambi i casi essere ancorata tramite molle direttamente al substrato, e sostenere a sua volta la massa di sensing, o viceversa; questo aspetto è quello che comporta le maggiori differenze in termini prestazionali tra le architetture framed.

Lo schema di figura 1.11a rappresenta un'architettura drive-frame-based, mentre quello di figura 1.11d una sense-frame-based. In entrambi i casi tuttavia la massa di driving, sia essa interna o esterna alla struttura, è ancorata direttamente al substrato, e ciò fa sì che le componenti in direzione y delle forze agenti sulla massa di driving abbiano idealmente effetto nullo sulla dinamica del sistema, data la rigidità delle molle in quella direzione. Ovviamente questo ha effetti benefici per la riduzione del Q-bias, poichè vengono ad essere attenuate le oscillazioni lungo l'asse di sensing in fase con il driving.

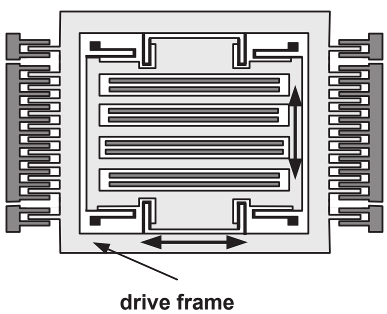
Detta ω_D pulsazione di risonanza dell'oscillazione di driving, le molle che sostengono la massa di driving m_D, ed indirettamente quella di sensing m_S, presentano una costante elastica accresciuta dal contributo di entrambe le masse: $k_x = \omega_D^2(m_D + m_S)$. Lo smorzamento c_y è ridotto poichè riguarda solo la porzione di sensing della massa totale. In definitiva il guadagno (e quindi la sensibilità) in caso di sensing risonante risulta incrementato qualora la massa di driving sia ancorata direttamente al substrato, a patto che siano implementate opportune schermature nei confronti del campo elettrico attorno agli elettrodi di sensing. Infatti la massa di sensing si muove lungo l'asse x insieme a quella di driving, e ciò può comportare distorsioni significative del segnale in uscita dal sensore, dovute agli effetti di bordo che insorgono con lo scostamento degli



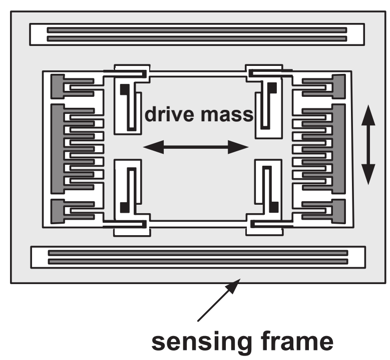
(a) Architettura drive-frame-based con massa di driving ancorata al substrato



(b) Architettura sensing-frame-based con massa di driving sostenuta dalla massa di sensing



(c) Architettura drive-frame-based con massa di driving sostenuta dalla massa di sensing



(d) Architettura sensing-frame-based con massa di driving ancorata al substrato

Figura 1.11: Architetture framed

elettrodi di sensing.

Tra lo schema di figura 1.11a e quello di figura 1.11d è significativa, a parità di area occupata sul chip, la minore disponibilità di spazio per gli elettrodi di driving dell'architettura sense-frame-based. Ciò complica il controllo dell'oscillazione di driving, e risulta particolarmente significativo se si considera che è vantaggioso per la dinamica del sistema realizzare $m_D > m_S$. Questo è il motivo principale per il quale l'architettura di figura 1.11b è generalmente scartata nel confronto con l'omologa drive-frame-based.

Per quanto riguarda le figure 1.11c e 1.11d, vi sono rappresentate strutture in cui la massa di sensing è sostenuta direttamente dal substrato, con una sospensione rigida lungo x. In tal caso è necessario generare forze minori per l'attuazione del sistema, poichè le due masse non devono muoversi insieme lungo l'asse di driving; questo tuttavia non è un vantaggio determinante di solito, a fronte di una maggiore suscettibilità nei confronti del Q-bias, dovuta al disallineamento dell'oscillazione di driving rispetto all'asse x, in quanto m_S ed m_D si muovono insieme lungo l'asse di sensing. Un vantaggio è invece l'immunità nei confronti degli effetti di bordo per gli elettrodi di sensing, in quanto m_S è ferma lungo l'asse di driving.

Dinamica sensore framed 2 DOF Per ricavare le equazioni dinamiche di uno qualsiasi dei sistemi in figura 1.11, prendiamo come riferimento l'architettura drive-frame-based con massa di driving ancorata al substrato. Per gli altri sistemi le equazioni sono formalmente le stesse, cambiando in sostanza soltanto l'asse lungo il quale le due masse oscillano insieme.

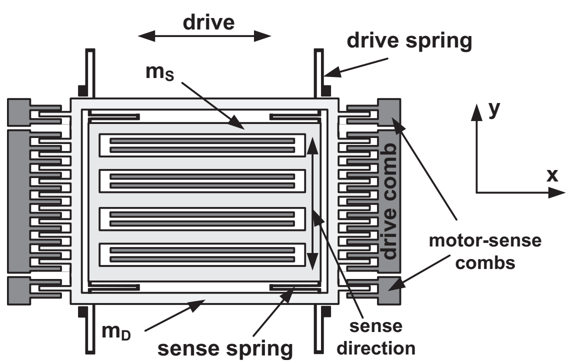


Figura 1.12: Giroscopio framed 2 DOF

Le due masse m_S e m_D sono sostenute tramite sospensioni in grado, idealmente, di flettersi solo in una direzione: l'asse y di sensing per la sospensione posta tra le due masse, l'asse x di driving per quella che àncora m_D al substrato. Tenendo conto di questo aspetto il sistema 1.3 può essere riadattato in:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\frac{c_x}{m_D+m_S}\dot{x} + \omega_x^2 x = 2\frac{m_S}{m_D+m_S}\Omega_z\dot{y} + \frac{F_{Ax}}{m_D+m_S} \\ \ddot{y} + 2\frac{c_y}{m_S}\dot{y} + \omega_y^2 y = -2\Omega_z\dot{x} + \frac{F_{Ay}}{m_S} \end{cases} \tag{1.32}$$

Questa soluzione fa in modo che le due masse si muovano lungo x in modo sincrono, grazie alla rigidità della sospensione che collega la massa "di sensing"

m_S a quella esterna m_D, attuata in direzione x da parte dei comb drives posti ai suoi lati. Le componenti spurie, in direzione y, della sollecitazione applicata a m_D, vengono soppresse dalla sospensione esterna, rigida in direzione y. Inoltre si osserva che l'effetto della forza di Coriolis, agente sulla massa di sensing, si ripercuote sul moto lungo x delle due masse attenuato del fattore $\frac{m_S}{m_D+m_S}$.

Giroscopi monoassiali con driving e sensing disaccoppiati È possibile utilizzare strutture framed a tre gradi di libertà per fare in modo che la massa di sensing e quella di driving non siano vincolate a muoversi assieme lungo alcun asse. Questo aspetto è particolarmente interessante poichè consente di ridurre fortemente il Q-bias, analogamente a quanto avviene per le strutture framed viste in precedenza con la massa di driving ancorata al substrato; tuttavia, a differenza delle architetture precedenti, in questo caso la massa di sensing è fissa in direzione dell'asse di driving, e questo riduce le distorsioni sul segnale prodotto in uscita legate agli effetti di bordo delle interfacce capacitive.

Una possibile implementazione di un sensore di questo tipo è riportata in figura1.13.

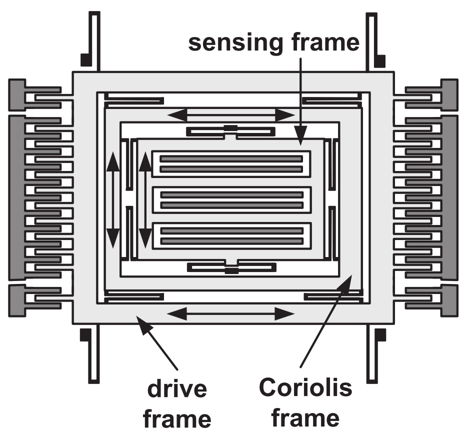


Figura 1.13: Sensore con driving e sensing disaccoppiati

La struttura presenta tre masse compenetrate: la massa di driving, più esterna, ancorata al substrato e vincolata a muoversi solo lungo l'asse di driving; la massa di sensing, anch'essa ancorata al substrato e vincolata ad oscillare lungo l'asse di sensing, ed infine la massa di Coriolis. Quest'ultima massa, inserita tra le altre due e ad esse collegata, realizza il disaccoppiamento: infatti essa oscilla insieme alla massa di driving lungo l'asse x, e subisce una deflessione in direzione ad esso ortogonale a causa della forza di Coriolis, trascinando a sua volta la massa di sensing lungo y.

1.6.3.2 Architetture torsionali

Supponiamo che siano verificate le ipotesi che hanno consentito di ricavare le equazioni del sistema 1.9; ci sono due possibilità per realizzare un giroscopio torsionale monoassiale, entrambe implementate con successo in prodotti commerciali:

- Applicare l'oscillazione di driving in modo da far oscillare il disco intorno all'asse uscente dal substrato (asse z), rilevando gli effetti del momento di Coriolis rispetto ad uno degli altri due assi, paralleli al substrato.

- Imporre alla massa vibrante oscillazioni di driving *uscenti* dal substrato, scegliendo come asse di sensing l'asse z o il rimanente asse parallelo al substrato.

Giroscopio torsionale monoassiale con driving parallelo al substrato
Si consideri la struttura di figura 1.14: i comb drives mettono in rotazione la massa sismica a forma di farfalla intorno all'asse z. La sospensione centrale consente alla massa, oltre a rotazioni intorno all'asse z di driving, di vibrare intorno all'asse di sensing y. Data la notevole dimensione degli elettrodi di sensing ai lati dell'asse y, sui quali si effettua una lettura differenziale di capacità, la sensibilità di dispositivi di questo tipo è di solito elevata, ma si possono avere prestazioni deludenti in termini di Q-bias a causa dei difetti costruttivi della sospensione centrale, che provocano un eccessivo accoppiamento tra l'oscillazione di driving e quella di sensing.

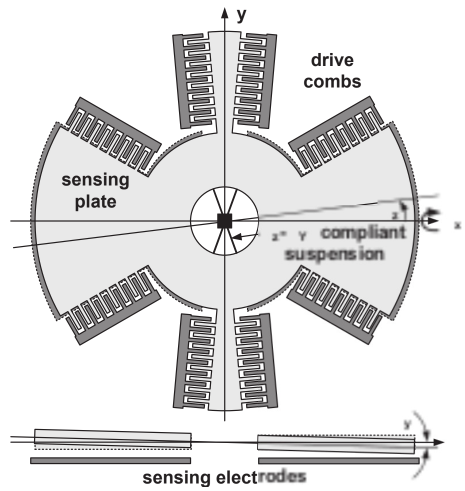


Figura 1.14: Giroscopio torsionale monoassiale

Le equazioni relative alla struttura in questione sono perfettamente analoghe a quelle per una struttura vibrante lineare con due gradi di libertà, dove alle masse si sostituiscono i momenti d'inerzia, alle coordinate lineari gli angoli di rotazione; smorzamenti e costanti elastiche sono relativi a un sistema torsionale:

$$\left\{ \begin{array}{c} J_y\ddot{\theta}_y + c_{\theta y}\dot{\theta}_y + k_{\theta y}\theta_y = 2J_x^D\Omega_x\dot{\theta}_z \\ J_z\ddot{\theta}_z + c_{\theta z}\dot{\theta}_z + k_{\theta z}\theta_z = -2J_x^D\Omega_x\dot{\theta}_y + M_{Dz} \end{array} \right. \tag{1.33}$$

1.6.3.3 Architetture torsionali disaccoppiate

I principi introdotti per le strutture framed nei giroscopi vibranti lineari possono essere adattati anche a strutture framed di sistemi torsionali, ottenendo le quattro configurazioni 2 DOF già trattate: massa di driving esterna o interna, ancorata al substrato o sostenuta dalla massa di sensing.

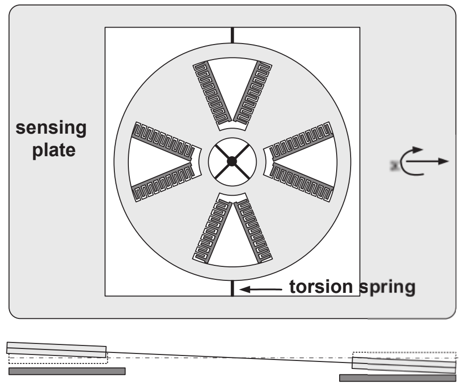


Figura 1.15

Un esempio di questo tipo di sensori è illustrato in figura 1.15: il disco interno (massa di driving), ancorato al substrato, può oscillare solo intorno all'asse z, e sostiene a sua volta la massa di sensing esterna, vincolata a compiere la stessa rotazione rispetto a z. La massa di sensing presenta un solo grado di libertà relativamente a quella di driving, e quindi può ruotare intorno ad un asse che per piccoli valori di θ_z è quasi coincidente con y. Per poter trascurare l'effetto dell'oscillazione di driving sulla lettura delle capacità di sensing poste ai lati del disco, la massa esterna deve presentare elettrodi sufficientemente estesi in direzione x.

1.6.3.4 Giroscopi multidimensionali

Per alcune applicazioni può essere sufficiente misurare la velocità angolare di un sistema rispetto ad un solo asse, ma spesso è richiesta la misura di un numero maggiore di componenti delle grandezze cinematiche in gioco, fino a giungere a sensori inerziali completi 6D, in grado di rilevare le tre componenti dell'accelerazione lineare e le tre della velocità angolare.

Per ottenere un giroscopio 3D si possono seguire strategie differenti, realizzando sistemi con diversi gradi di integrazione, caratterizzati da un impiego più o meno efficiente delle risorse disponibili in termini di costo, consumo di potenza, ingombro.

- È possibile imbattersi in sistemi in cui le strutture meccaniche sono separate tra loro, pur trovandosi spesso all'interno dello stesso package o dello stesso chip; la parte elettronica di elaborazione dei segnali ed il front end analogico può invece essere comune ai diversi sensori, riducendo il consumo di potenza e l'ingombro dovuto, ad esempio, all'impiego di catene di alimentazione separate.

- Si hanno sensori inerziali multidimensionali in cui l'integrazione si spinge fino al livello delle strutture meccaniche, per cui all'interno del sistema non si ripetono identiche tante strutture quanti sono i segnali d'interesse, ma si hanno strutture dedicate al rilevamento di due o più grandezze. Nell'ambito dei giroscopi, questo in genere non porta a riduzioni della complessità meccanica, ma semplifica la gestione dei segnali letti e generati (driving), il consumo, l'ingombro legato al numero di attuatori.

- La sensibilità di molti giroscopi vibranti alle accelerazioni lineari, che in generale costituisce l'origine di un segnale indesiderato, può essere sfruttata per realizzare sensori multidimensionali in grado di operare sia da accelerometro che da giroscopio.

Nel seguito sarà descritto, come esempio di sensore 3D, il principio di funzionamento del giroscopio integrato nel dispositivo SD746.

Capitolo 2

Multiplexing nei sensori multicanale

Lo sviluppo di sensori in grado di leggere simultaneamente più grandezze fisiche è in generale un successo della tecnologia microelettronica, dovuto soprattutto alla realizzazione di interfacce sempre più performanti e complesse, in grado di gestire un crescente quantitativo di informazioni. Un esempio tipico di sensore multicanale è la matrice di fotorivelatori delle fotocamere digitali, in cui l'immagine è acquisita leggendo il segnale prodotto da milioni di componenti elementari.

Un giroscopio triassiale produce tipicamente quattro segnali analogici, che devono essere opportunamente condizionati e digitalizzati per estrarne le grandezze oggetto di misura e le informazioni utili al controllo in feedback della catena di attuazione. Per un giroscopio vibrante ad effetto Coriolis ciascun grado di libertà della struttura conferisce ad una massa vibrante la possibilità di compiere oscillazioni, lineari o torsionali, rispetto ad un asse di riferimento, in risposta ad un segnale primario di attuazione (driving) che mantiene in risonanza la struttura meccanica complessiva. Poichè ciascun segnale di sensing rappresenta in genere la risposta di un oscillatore meccanico del secondo ordine alla sollecitazione di driving, vengono prodotti in uscita essenzialmente segnali modulati in ampiezza a portante soppressa, il cui spettro è centrato alla frequenza di driving. La lettura del sensore viene spesso effettuata da un'interfaccia analogica con un singolo canale in ingresso, che deve trattare assieme i quattro segnali, ferma restando la possibilità di distinguerne il contenuto informativo in corrispondenza degli stadi di elaborazione successivi. Si rende quindi necessario l'impiego di tecniche di multiplazione adeguate, come avviene in qualunque situazione nella quale un canale deve essere condiviso tra più segnali; le tecniche di multiplazione che possono essere prese in considerazione si suddividono essenzialmente in tre categorie:

1. Tecniche a suddivisione di tempo
2. Tecniche a suddivisione di frequenza
3. Tecniche a suddivisione di codice

Di seguito vengono descritti brevemente i tre metodi citati, soffermandosi sulle tecniche a suddivisione di codice, che costituiscono l'aspetto di maggiore interesse in questa tesi.

Per quanto riguarda la multiplazione di codice (CDMA), la trattazione dell'argomento si basa su una letteratura in larghissima parte orientata a sistemi di comunicazione digitali, mentre l'applicazione che sarà presentata nei capitoli successivi riguarda un'interfaccia analogica per sensori inerziali. Tuttavia i concetti sui quali si è ragionato, nel tentativo di impiegare segnali *spread spectrum*[1] per modulare i segnali analogici d'interesse, restano quelli alla base del successo dei sistemi CDMA nel moderno panorama delle telecomunicazioni.

2.1 Time Division Multiple Access - TDMA

I metodi di accesso "a divisione di tempo" assegnano a ciascun contenuto informativo un intervallo temporale durante il quale esso ha accesso esclusivo al canale. Sincronizzando ricevitore e trasmettitore è possibile fare in modo che i segnali multiplati siano trattati indipendentemente, mantenendosi distinti nel tempo ma sovrapposti in frequenza.

Questa tecnica di accesso è stata impiegata soprattutto in ambito digitale, poichè in questo caso i segnali sono per loro stessa natura di tipo tempo-discreto, e la sequenza di bit che costituisce l'informazione è codificata in un andamento costante a tratti del segnale. Per segnali digitali l'uso di protocolli TDMA risulta concettualmente semplice, sebbene nella pratica questa tecnica richieda una sincronizzazione accurata fra trasmettitore e ricevitore, non sempre facile da ottenere, e risulti soggetta all'impiego di segnali con potenza di picco tanto

[1] Letteralmente "ad ampio spettro"; il termine si riferisce alle caratteristiche delle modulazioni di codice nel dominio della frequenza.

più elevata quanto minore è la durata dell'intervallo di segnalazione, per mantenere elevato il rapporto segnale-rumore. Solitamente tra uno *slot* temporale e l'altro sono inseriti degli *intervalli di guardia*, ossia degli intervalli di tempo in cui non viene trasmessa informazione, per rendere meno stringenti i requisiti di sincronia tra sorgente e ricevitore, consentendo che scostamenti del riferimento temporale, entro certi limiti, non abbiano effetto distruttivo sull'informazione; questo in genere limita significativamente il numero di segnali che possono essere multiplati, una volta stabilito il *bitrate*.

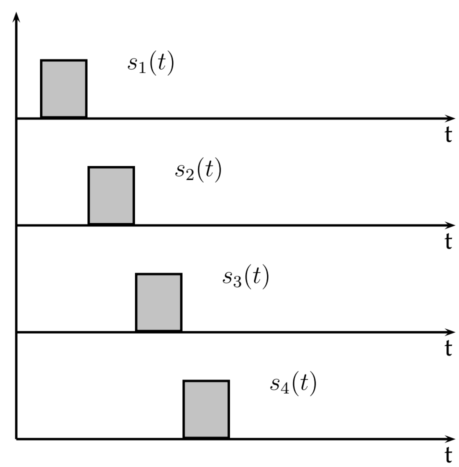


Figura 2.1: Segnali multiplati a divisione di tempo

2.2 Frequency Division Multiple Access - FDMA

Le tecniche a divisione di frequenza sono le più impiegate per la multiplazione di segnali analogici; un esempio tra tutti è quello delle trasmissioni radio broadcasting, in cui le diverse stazioni trasmettono simultaneamente segnali collocati su porzioni diverse di spettro, e quindi distinguibili in frequenza.

In ricezione è possibile selezionare uno specifico segnale filtrando le parti di spettro non di interesse, demodularlo e ricostruirlo. Questa tecnica è duale di quella TDMA, non presenta i problemi di sincronia citati al paragrafo precedente ma richiede l'introduzione di intervalli di guardia tra gli spettri dei segnali multiplati, per ovviare alle incertezze legate alla non idealità dei filtri, alle imprecisioni sulla frequenza degli oscillatori impiegati in modulazione e demodulazione, all'effetto Doppler in trasmissioni radiomobili. Date la banda del canale BW, e quella del singolo segnale informativo b_s, quindi, il numero di segnali che possono essere multiplati senza che si verifichino eccessive interferenze mutue è minore del rapporto $\frac{BW}{b_s}$.

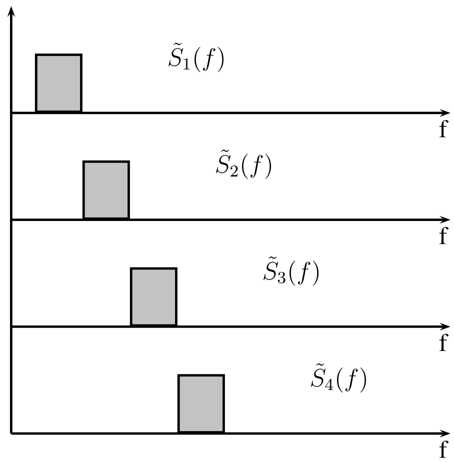


Figura 2.2: Segnali multiplati a divisione di frequenza

2.3 Code Division Multiple Access - CDMA

2.3.1 Definizioni e convenzioni usate nella trattazione

Data una **costellazione** S di M simboli,[2] a ciascuno dei quali corrisponde un segnale diverso $\{s_1(t), \ldots, s_M(t)\}$, dal lato del ricevitore occorre **decidere** a quale dei possibili simboli inviati corrisponde il segnale $y(t)$ ricevuto. La decisione porta a selezionare il segnale $\hat{\mathrm{H}}[y(t)] = s_k(t)$ tra gli M possibili, e deve avvenire in base ad un criterio che minimizzi la probabilità di errore. Se tutti i simboli sono equiprobabili, come avviene per un sistema ben progettato, nell'ipotesi di canale gaussiano il criterio di scelta ottimo è quello della *massima verosimiglianza* (MV).

Il modello del canale è perfettamente noto qualora per ogni possibile segnale trasmesso sia conosciuta la probabilità condizionata $\mathrm{P}\{y(t)|s_k(t)\}$, ovvero la probabilità che al ricevitore giunga il segnale $y(t)$ dato che è stato trasmesso il segnale $s_k(t)$.

[2] S può contenere, al limite, un'infinità non numerabile di simboli

In base al criterio della massima verosimiglianza il ricevitore decide per il segnale $\hat{\mathrm{H}}[y(t)]$ per il quale la funzione $\mathrm{P}\left\{y(t)|\hat{\mathrm{H}}[y(t)]\right\}$ ha valore massimo.

Si definisce la *distanza euclidea* tra il segnale ricevuto $s_k(t)$ e quello trasmesso $y(t)$ come:

$$\mathrm{d}(\mathbf{s_k}, \mathbf{y}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} [y(t) - s_k(t)]^2 \,\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

In base al modello di un canale gaussiano:

$$\mathrm{P}[y(t)|s_k(t)] \propto \exp\left(-\frac{\mathrm{d}^2(\mathbf{s_k}, \mathbf{y})}{N_0}\right) \tag{2.2}$$

in cui N_0 è la *densità spettrale di potenza monolatera* del rumore AWGN. È evidente che:

L'applicazione del criterio MV ad un canale gaussiano comporta la scelta del simbolo a minima distanza euclidea dal segnale ricevuto, traducendosi nel *criterio della minima distanza*:

$$\hat{\mathrm{H}}\,[y(t)] = s_k(t) \text{ tale che } \mathrm{d}(\mathbf{s_k}, \mathbf{y}) \text{ è minima} \tag{2.3}$$

È prassi consolidata interpretare i segnali come elementi di uno spazio vettoriale di dimensione infinita, nel quale valgono le seguenti definizioni:

Prodotto interno[3] tra due segnali $u(t)$, $v(t)$:

$$(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) \,\mathrm{d}t \tag{2.4}$$

che prende anche il nome di **correlazione** tra $u(t)$ e $v(t)$.

Norma di un segnale $s(t)$:

$$\|\underline{s}\| = \mathrm{d}(\mathbf{s}, \mathbf{0}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \,\mathrm{d}t} \tag{2.5}$$

che coincide con la definizione di *valore efficace* di $s(t)$. Mentre

$$\|\underline{s}\|^2 = \mathrm{d}^2(\mathbf{s}, \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) \,dt$$

[3]Con il simbolo * si indica l'operazione di coniugazione sui numeri complessi, ininfluente nel caso di segnali reali.

esprime l'energia E_s del segnale.

Applicando le 2.5 - 2.4 la 2.3 si può riscrivere come:

$$\mathrm{d}^2(\mathbf{s_k}, \mathbf{y}) = \underbrace{\int_0^{\infty} y^2(t)\,\mathrm{d}t}_{E_y} - \underbrace{2\int_0^{\infty} s_k(t)y(t)\,\mathrm{d}t}_{2(\underline{s}_k,\underline{y})} + \underbrace{\int_0^{\infty} s_k^2(t)\,\mathrm{d}t}_{E_s} \tag{2.6}$$

Quindi in base al criterio di minima distanza, se i segnali della costellazione sono tutti di pari energia, il ricevitore deve decidere per il segnale $s_k(t)$ la cui correlazione con il segnale ricevuto $y(t)$ risulta massima, in modo da minimizzare la 2.6.

2.3.2 Segnali a modulazione di codice

Consideriamo un generico segnale $s(t)$, ottenuto modulando una portante a frequenza f_0, caratterizzato dall'inviluppo complesso $\mathring{S}(t)$ in base al quale può essere espresso come:

$$s(t) = \Re[\mathring{S}(t)\exp(\jmath 2\pi f_0 t)] \tag{2.7}$$

A seconda che la legge di modulazione impiegata sia una funzione continua del tempo o sia costante a tratti si parla di *modulazione continua* o *discreta*, tra le quali la seconda è alla base dei sistemi CDMA.

2.3.2.1 Classificazione

Un segnale a modulazione di codice è una sequenza di impulsi elementari (*chips*) di forma fissata, che si ripetono a intervalli di tempo regolari Δt. Ciascun chip è caratterizzato da un inviluppo complesso $\mathring{S}_0(t)$ che ne definisce la forma e l'eventuale modulazione d'angolo interna. L'informazione è codificata nella sequenza manipolando ampiezza, fase ed eventualmente frequenza portante di ciascun impulso, ottenendo un segnale il cui inviluppo complesso è del tipo:

$$\mathring{S}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathring{S}_0(t - i\Delta t)\exp(\jmath 2\pi F_i t) \tag{2.8}$$

dove, per ogni i-esimo impulso della sequenza, $a_i = |a_i|e^{\jmath\phi_i}$ è l'*ampiezza complessa*, e F_i lo scostamento della portante rispetto alla frequenza centrale fissata f_0.

I segnali discreti si distinguono in **aperiodici** e **periodici**, a seconda che siano costituiti da una sequenza finita di N impulsi, o che la legge di modulazione si ripeta indefinitamente con un periodo di N chip. In entrambi i casi N si dice *lunghezza* del codice.

In base al tipo di modulazione a cui sono sottoposti gli impulsi elementari, i segnali discreti si dividono in 2 categorie:

1. APSK - *Amplitude-phase shift keying*: In questo caso la modulazione riguarda solo l'ampiezza complessa (modulo e/o fase) di ciascun impulso.

2. FSK - *Frequency Shift Keying:* Vengono mantenute costanti le ampiezze complesse degli impulsi, ma per ciascun chip varia la deviazione F_i dalla frequenza centrale. Non sono d'interesse per questo lavoro di tesi.

2.3.2.2 Funzioni di correlazione di segnali APSK

Funzione di autocorrelazione (ACF) Per un segnale APSK la 2.8 si può scrivere

$$\mathring{S}(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \mathring{S}_0(t - i\Delta t) \tag{2.9}$$

In cui $\underline{a} = (a_0, \ldots, a_{N-1})$ è il vettore che esprime la sequenza impiegata nella modulazione degli impulsi. La durata complessiva del segnale, o di un suo periodo, è $T = N\Delta t$. Definendo Δ_c la *durata* di ciascun chip, senza perdere di generalità si può assumere che $\Delta_c \leq \Delta t$. La funzione di autocorrelazione all'istante τ, normalizzata rispetto all'energia E trasportata dal segnale nell'intervallo di tempo $[0, T]$, si esprime come:

$$\mathring{\rho}(\tau) = \frac{1}{E} \int_0^T \mathring{S}(t) \mathring{S}^*(t - \tau) \mathrm{d}t \tag{2.10}$$

Sostituendo la 2.9 nella 2.10:

$$\mathring{\rho}(\tau) = \frac{1}{E} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_i a_k^* \int_0^T \mathring{S}_0(t - i\Delta t) \mathring{S}_0^*(t - k\Delta t - \tau) \, \mathrm{d}t$$

e indicando la funzione di autocorrelazione dell'impulso elementare come[4]:

$$\mathring{\rho}_c(\tau) = \frac{1}{E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \mathring{S}_0(t) \mathring{S}_0^*(t - \tau) \, \mathrm{d}t \tag{2.11}$$

si ottiene:

$$\mathring{\rho}(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\|\underline{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_k^* \right) \mathring{\rho}_c \left[\tau - (i - k)\Delta t \right]$$

[4] $E_0 = \rho_c(0) = \int_0^{\Delta T} |S_0(t)|^2 \, \mathrm{dt}$

e in definitiva, se $m = i - k$,

$$\mathring{\rho}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho(m)\mathring{\rho}_c(\tau - m\Delta t) \tag{2.12}$$

con

$$\rho(m) = \frac{1}{\|\underline{a}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} a_i a_{i-m}^* \tag{2.13}$$

La 2.13 è l'autocorrelazione della sequenza $\underline{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{N-1})$, e caratterizza la "somiglianza" tra due sue repliche traslate di m posizioni.

L'autocorrelazione di un segnale APSK è a sua volta un segnale APSK, della forma espressa nella 2.12; è evidente che per caratterizzare completamente l'autocorrelazione di un segnale APSK è sufficiente fornire le funzioni di autocorrelazione dell'impulso elementare $\mathring{\rho}_c(\tau)$ e del codice $\rho(m)$.

La funzione di autocorrelazione è *sempre* una funzione a simmetria hermitiana: $\mathring{\rho}(\tau) = \mathring{\rho}^*(-\tau)$, quindi vale anche $\rho(m) = \rho^*(-m)$

Funzione di cross-correlazione (CCF) Nei sistemi CDMA è fondamentale disporre di codici con particolari proprietà di cross-correlazione; dati due segnali APSK della stessa lunghezza che impiegano chip della stessa forma, modulati con sequenze differenti:

$$\mathring{S}_k(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{k,i}\mathring{S}_0(t - i\Delta t) \qquad \mathring{S}_l(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{l,i}\mathring{S}_0(t - i\Delta t)$$

$$\underline{a}_k = (a_{k,0}, \ldots, a_{k,N-1}) \qquad \underline{a}_l = (a_{l,0}, \ldots, a_{l,N-1})$$

operando con passaggi analoghi a quelli per l'autocorrelazione si ricava la cross-correlazione $\left(\underline{\mathring{S}}_k, \underline{\mathring{S}}_l\right)$ all'istante τ come:

$$\mathring{\rho}_{kl}(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho_{kl}(m)\mathring{\rho}_c(\tau - m\Delta t) \tag{2.14}$$

con la cross-correlazione tra i due codici espressa da:

$$\rho_{kl}(m) = \frac{1}{\|\underline{a}_k\| \, \|\underline{a}_l\|} \sum_{i=0}^{N-1} a_{k,i} a_{l,i-m}^* \tag{2.15}$$

La cross-correlazione di due segnali APSK che differiscono tra loro solo per la sequenza di codifica impiegata nella modulazione è a sua volta un segnale APSK, espresso dalla 2.14. La forma dell'impulso elementare $\mathring{\rho}_c$ è ancora espressa dalla 2.11, mentre l'ampiezza degli impulsi dipende esclusivamente dalla crosscorrelazione tra le sequenze dei due segnali di partenza (Eq. 2.15).

2.3.3 Calcolo delle funzioni di correlazione dei codici

2.3.3.1 ACF

Per il calcolo della funzione di autocorrelazione di un generico codice $\underline{c} = (c_0, \ldots, c_{N-1})$ è possibile distinguere se esso si ripeta periodicamente o meno:

(*Funzione di autocorrelazione aperiodica*)

$$\rho_a(m) = \frac{1}{\|\underline{c}\|^2} \sum_{i=m}^{N-1} c_i c_{i-m}^* \tag{2.16}$$

La 2.16 restituisce la ACF di una sequenza **aperiodica** di lunghezza N.

(*Funzione di autocorrelazione periodica*)

$$\rho_p(m) = \frac{1}{\|\underline{c}\|^2} \sum_{i=0}^{N-1} c_i c_{i-m}^* \tag{2.17}$$

La 2.17 restituisce la ACF di una sequenza **periodica** di lunghezza N. Anche $\rho_p(m)$ è ovviamente periodica di periodo N.

Si sottolineano alcune proprietà:

- Si può scrivere:

  $$\rho_p(-m) = \rho_p(N-m) = \rho_p^*(m-N)$$

  da cui si vede che $\rho_p(m)$ per un codice di lunghezza N è completamente caratterizzata dal calcolo della 2.17 per $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ distinti valori di m.

- Sia la ACF periodica che quella aperiodica assumono valore unitario nell'origine: $\rho(0) = 1$

2.3.3.2 CCF

Per il calcolo della funzione di cross-correlazione di due sequenze della stessa lunghezza N attraverso la 2.15 si distingue ancora tra sequenze aperiodiche e periodiche:

(*Funzione di cross-correlazione aperiodica*)

$$\rho_{a,kl}(m) = \begin{cases} \frac{1}{\|\underline{a}_k\|\|\underline{a}_l\|} \sum_{i=m}^{N-1} a_{k,i} a^*_{l,i-m} & \text{se m} \geq 0 \\ \frac{1}{\|\underline{a}_k\|\|\underline{a}_l\|} \sum_{i=0}^{N+m-1} a_{k,i} a^*_{l,i-m} & \text{se}\, m < 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

(*Funzione di cross-correlazione periodica*)

$$\rho_{p,kl}(m) = \frac{1}{\|\underline{a}_k\| \, \|\underline{a}_l\|} \sum_{i=0}^{N-1} a_{k,i} a^*_{l,i-m} \tag{2.19}$$

Anche $\rho_{p,kl}(m)$ è ovviamente periodica di periodo N.

2.3.4 Modulazione e demodulazione *Direct Sequence* (DS)

Una modulazione *direct sequence* consiste nella modulazione di modulo e fase di un codice APSK da parte del segnale informativo. Nelle applicazioni CDMA di interesse il codice è sempre costituito da una sequenza di valori complessi di eguale modulo (convenzionalmente unitario) e fase differente, ovvero si tratta di modulazioni **PSK** (Phase Shift Keying).

Per recuperare il segnale informativo dalla modulazione DS di un codice PSK, è sufficiente moltiplicare *in modo sincrono* il segnale modulato per il complesso coniugato del codice; infatti, detti $x(t)$ il segnale informativo, e $y(t)$ il risultato della modulazione del codice $c(t)$:

$$y(t) = x(t)c(t)$$

allora

$$x(t) = y(t)c^{-1}(t)$$

e poichè $c(t) \triangleq e^{\jmath\theta_k t}\ \forall\, t$

$$x(t) = y(t)c^*(t)$$

In questo lavoro di tesi saranno impiegate sempre sequenze *binarie*, i cui valori possono essere mappati in $\{+1; -1\}$.

2.3.5 Modulazione DS-binaria di un segnale BPSK

Si consideri per esempio il vettore $\underline{b} = (b_0, \ldots, b_{N-1})$, che rappresenta l'informazione da trasmettere codificata su due simboli ($b_i = \{\pm 1\}$); il suo contenuto informativo può essere associato ad una forma d'onda del tipo:

$$B(t; \underline{b}) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T_b} - iT_b\right)$$

per trasmettere $B(t; \underline{b})$ con una modulazione di fase basta moltiplicare per una portante a frequenza f_0:

$$s(t; \underline{b}) = B(t; \underline{b}) \cos(2\pi f_0 t) \tag{2.20}$$

ottenendo un segnale discreto, modulato solo in fase da una costellazione binaria di simboli, ovvero un segnale **BPSK** (Binary Phase Shift Keying).

Attraversando il canale, in generale il segnale giunge al ricevitore attenuato, sfasato e ritardato, ovvero nella forma:

$$s_r(t; \underline{b}) = \gamma B(t - \tau; \underline{b}) \cos(2\pi f_0 t + \phi) \tag{2.21}$$

si suppone che il ricevitore sia dotato di sistemi per il recupero del sincronismo e della fase, e si trascura l'attenuazione ($\gamma = 1$); inoltre, ci poniamo nel caso di canale gaussiano. Il ricevitore ottimo dovrà basarsi sul criterio della massima verosimiglianza per decidere di volta in volta il valore $\hat{b}_i$ del bit informativo ricevuto. Il demodulatore calcola quindi la seguente correlazione:

$$z_i = \int_{(i-1)T_b+\tau}^{iT_b+\tau} s_r(t, \underline{b}) \cos(2\pi f_0 t + \phi)\, \mathrm{d}t \tag{2.22}$$

e la decisione avviene in base al segno: $\hat{b}_i = \mathrm{sgn}(z_i)$.

Per realizzare una modulazione direct sequence del segnale $B(t; \underline{b})$ si può impiegare un codice binario di lunghezza L

$$\underline{c} = (c_0, \ldots, c_{L-1}) \quad c_i = \{\pm 1\}$$

che si ripete con periodo T_b. Il segnale trasmesso diventa un nuovo segnale BPSK:

$$s_{DS}(t; \underline{b}) = c(t) B(t; \underline{b}) \cos(2\pi f_0 t)$$

e quello ricevuto:

$$s_{DSr}(t; \underline{b}) = c(t - \tau) B(t - \tau; \underline{b}) \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

la correlazione calcolata dal lato del ricevitore diviene:

$$z_i = \int_{(i-1)T_b+\tau}^{iT_b+\tau} s_{DSr}(t, \underline{b}) c^*(t-\tau) \cos(2\pi f_0 t + \phi)\, \mathrm{d}t \tag{2.23}$$

ma poichè $c^2(t) = 1$, lo stesso risultato si può ottenere in due fasi: prima moltiplicando in maniera *sincrona* il segnale ricevuto per il codice, e successivamente operando la correlazione espressa dalla 2.22 su un segnale nella forma 2.21. In definitiva la demodulazione di segnale modulato DS si realizza semplicemente moltiplicando il segnale ricevuto per la sequenza impiegata in trasmissione, opportunamente ritardata.

2.3.6 Segnali spread spectrum

I segnali a modulazione di codice sono oggi impiegati in una varietà di settori, a partire dai sistemi d'arma, che rappresentano storicamente il loro primo campo di utilizzo, fino alla telefonia cellulare e alle reti wireless di ultima generazione. I segnali ottenuti modulando codici con particolari proprietà di correlazione presentano infatti alcune potenzialità molto interessanti, tra cui:

- Consentono di ricevere simultaneamente segnali che condividono la medesima porzione di spettro (CDMA).
- Presentano generalmente uno spettro ampio, caratterizzato da densità spettrale di potenza bassa. Questo li rende maggiormente immuni ai disturbi localizzati su una porzione ristretta della banda, e difficili da rilevare qualora non si conosca il codice impiegato nella modulazione. Anche qualora in uno scenario di guerra un nemico riconosca la presenza di una comunicazione spread spectrum su una certa banda, l'impiego di codici lunghi garantisce ottima robustezza crittografica.
- Lo spettro ampio è ottenuto in virtù del particolare tipo di modulazione impiegata, e non accorciando la durata del segnale. Questo permette di utilizzare, a parità di energia associata al segnale, trasmettitori caratterizzati da potenza di picco inferiore.
- In ambienti ad alta densità di trasmissioni radio, la compatibilità elettromagnetica tra i dispositivi trae giovamento dall'impiego di segnali con densità spettrale di potenza ridotta, i quali, idealmente, tendono a confondersi con il rumore di fondo, e restano singolarmente intellegibili solo impiegando in ricezione il codice opportuno.

- Tipicamente i segnali radio giungono al ricevitore come sovrapposizioni di onde che hanno compiuto percorsi diversi, e che quindi vengono ricevute con ritardi differenti (*multipath distortion*). Le modulazioni di codice possono essere orientate a generare segnali con elevata *risoluzione temporale*, robusti nei confronti di questo tipo di distorsioni.

La scelta dell'insieme di codici da impiegare punta in genere sulla valutazione delle loro funzioni di autocorrelazione per alcune applicazioni, di quelle di crosscorrelazione per altre:

- Sistemi quali i radar necessitano di ricostruire con precisione il ritardo tra due repliche traslate di un dato segnale, per cui è importante che l'autocorrelazione assuma valori trascurabili al di fuori di un intervallo quanto più stretto possibile.
- Nelle applicazioni multiutente prevale l'attenzione alla crosscorrelazione tra sequenze diverse, ciascuna utilizzata per codificare i dati destinati ad uno specifico gruppo di utenti: l'idea è quella di impiegare insiemi di codici per i quali la correlazione tra due sequenze diverse appartenenti alla stessa famiglia sia minima (idealmente nulla).
- Infine può rendersi necessaria l'individuazione di codici con buone proprietà sia di auto che di crosscorrelazione, come nel sistema di navigazione satellitare GPS, per il quale è indispensabile che il ricevitore possa stimare con buona precisione il ritardo con il quale i segnali dei satelliti giungono a terra, mantenendo distinte le informazioni trasmesse da ciascun satellite.

2.3.7 Sequenze orientate alla misura dei tempi di propagazione e alla risoluzione temporale

Le sequenze di questo tipo devono soddisfare requisiti di autocorrelazione stringenti: nel caso di canale gaussiano il criterio di massima verosimiglianza implica che il ricevitore ottimo consiste in un filtro adattato, la cui risposta temporale è la correlazione tra il segnale ricevuto e la forma d'onda attesa in ingresso. La posizione sull'asse dei tempi del picco centrale di autocorrelazione, prodotto in uscita dal filtro adattato, fornisce direttamente l'informazione circa il ritardo con cui il segnale giunge al ricevitore, con precisione tanto maggiore quanto più tale picco è "stretto" e di ampiezza maggiore rispetto agli altri.

Riprendendo le equazioni 2.16 e 2.17, per una sequenza binaria di N simboli del tipo $\{\pm 1\}$ è evidente che l'autocorrelazione aperiodica assume come minimo valore $\rho_a(N-1) = \frac{1}{N}$; per quanto riguarda la correlazione periodica si conosce una sola sequenza *ottima*, per la quale cioè $\rho_p(m) = 0$ se m non è multiplo di N, ovvero $+1\ +1\ +1\ -1$. È di conseguenza necessario fare affidamento per le applicazioni su codici che presentano proprietà di autocorrelazione sub-ottime, almeno finchè si considerano sequenze binarie.

La funzione di autocorrelazione periodica delle **sequenze minimax** segue la regola:

$$|\rho_p(m)| = \begin{cases} 1 \,\mathrm{se}\, m = 0 \bmod N \\ \frac{1}{N} \,\mathrm{se}\, m \neq 0 \bmod N \end{cases} \tag{2.24}$$

Condizione necessaria affinchè valga la 2.24 è che $N = 4h - 1 \,\mathrm{con\,h} \in \mathbb{N}$, per cui tale sequenze sono sempre dispari e non possono avere media nulla.

Sebbene la correlazione tra due repliche di un codice minimax traslate nel tempo non sia pari a zero, essa assume comunque valore minimo, tanto minore rispetto all'ampiezza del picco di autocorrelazione quanto più lunga è la sequenza in esame. Questo fatto può essere sfruttato in sistemi a suddivisione di codice, modulando ciascun segnale con una replica del medesimo codice, ritardata di un certo numero di intervalli di chip rispetto alle altre. Calcolando la correlazione del segnale multiplato con una delle sequenze in uso, i contributi dei segnali modulati dalle altre sequenze sono fortemente attenuati, e tendono a confondersi con il rumore di fondo, mentre il segnale di interesse può essere propriamente distinto.

Le sequenze minimax impiegate nella pratica si dividono in *m-sequence* e *sequenze di Legendre*. Sono noti algoritmi semplici per la loro generazione, basati sulla teoria dei campi finiti, alla quale di seguito sono fatti alcuni accenni.

2.3.7.1 Campi finiti

Un campo finito, o *campo di Galois*, è in generale un insieme finito di elementi, sul quale sono **definite** due operazioni, dette **somma** e **prodotto**, indicate rispettivamente con i simboli '+'e '×'. Per un campo finito valgono le seguenti proprietà, caratteristiche di ogni campo F (ad esempio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali):

$$
\begin{array}{ll}
\forall x \in F & \exists\{0,1\} : x + 0 = x \times 1 = x \\
\forall x, y \in F & x + y = y + x; \quad x \times y = y \times x \\
\forall x, y, z \in F & (x+y)+z = x+(y+z); \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z) \\
\forall x, y, z \in F & (x+y) \times z = (x \times z) + (y \times z) \\
\forall x \in F & \exists(-x) : x + (-x) = 0 \\
\forall x \neq 0 \in F & \exists x^{-1} : x \times x^{-1} = 1
\end{array}
$$

Il numero di elementi che costituiscono un campo finito esprime il suo *ordine*. Qualsiasi insieme di cardinalità p^m, con p numero primo ed $m \in \mathbb{N}$, può costituire un campo finito, mentre non esistono campi di Galois (GF) il cui ordine non sia esprimibile come potenza di un numero primo ($GF(p^m)$).

Campi finiti GF(p) I campi finiti più semplici sono i cosiddetti *campi primi*, ovvero i campi di Galois con un numero primo p di elementi. Il modo più semplice per ottenere un campo di questo tipo è numerarne i p elementi da 0 a $p-1$, e definire le operazioni tra di essi come le normali operazioni di somma e prodotto tra interi, seguite dall'estrazione del resto della divisione intera per p.

$GF(2)$

+	**0**	**1**
0	0	1
1	1	0

×	**0**	**1**
0	0	0
1	0	1

$GF(3)$

+	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	**0**	**1**	**2**
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$GF(5)$

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Tabella 2.1: Esempi di tavole di addizione e moltiplicazione per semplici campi finiti

- Moltiplicando per se stesso, secondo le regole del prodotto proprie del campo, un elemento $x \in GF(p)$ un certo numero di volte, si ottiene un *elevamento a potenza* su un campo finito, per il quale valgono le regole convenzionali dell'algebra:

$$(x^m)^n = x^{mn}$$
$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ma essendo l'operazione definita su un insieme finito di elementi, esisterà sempre una coppia di interi i, k con $i > k$ tale che:

$$x^i = x^k$$

- Ogni campo finito di cardinalità p contiene almeno un *elemento primitivo*, ovvero un elemento $\alpha \neq 0$ tale che:

$$\alpha^i \neq \alpha^{i+1} \quad \forall i \in \{0, \ldots, p-2\}$$

- Anche per un campo finito si definisce *logaritmo in base* α di x, e si indica con $l = \log_\alpha(x)$, il numero $l \in \mathbb{N}$ tale che $\alpha^l = x$.

Sequenze lineari su campi finiti Sia data una successione di elementi su un campo finito $GF(p)$, ottenuta nel modo seguente:

$$D_i = -f_{n-1}D_{i-1} - f_{n-2}D_{i-2} - \cdots - f_0 D_{i-n} \tag{2.25}$$

dove n elementi $D_0, \ldots, D_{n-1} \in GF(p)$ sono combinati linearmente tra loro per mezzo di coefficienti anch'essi appartenenti a $GF(p)$, e somme e prodotti sono operazioni definite sullo specifico campo di Galois. Una sequenza di questo tipo prende il nome di *sequenza lineare ricorrente di memoria n*, e viene tipicamente prodotta impiegando un registro a scorrimento del tipo schematizzato in figura 2.3, il quale viene detto *linear feedback shift register* (LFSR).

Il contenuto del registro a scorrimento in figura inizia l'evoluzione del proprio stato da una condizione iniziale in cui le n celle di ritardo contengono altrettanti elementi arbitrari di $GF(p)$; dato che il numero di elementi di $GF(p)$ è finito e pari a p, il sistema tornerà nella condizione di partenza dopo un certo numero di cicli di clock. Sono possibili p^n stati per l'LSFR, la cui successione è completamente determinata dal caricamento iniziale del registro. In particolare la condizione iniziale di zero ad ogni stadio del sistema origina una sequenza identicamente nulla, e quindi si deve fare in modo che il sistema non giunga mai in tale stato.

In definitiva si possono avere $p^n - 1$ stati, e il periodo massimo di una sequenza così ottenuta è quindi pari a $p^n - 1$ cicli di clock.

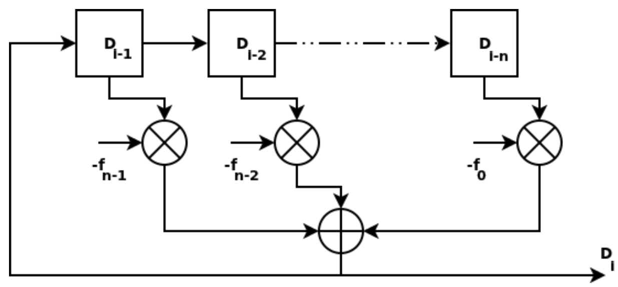


Figura 2.3: Linear Feedback Shift Register

Simbolo di legendre Si indica con il *simbolo di Legendre* $\psi(x)$ la funzione $\psi(x) : GF(p) \rightarrow \{-1; 1\}$ tale che:

$$\psi(x) = (-1)^{\log_\alpha(x)} \tag{2.26}$$

in cui α è un qualsiasi elemento primitivo di $GF(p)$.

Proprietà del simbolo di Legendre

1. La scelta dell'elemento primitivo è ininfluente per il calcolo di $\psi(x)$
2. $\psi(1) = 1$, infatti $\log_\alpha(1) = 0$ (pari)
3. $\psi(xy) = (-1)^{\log_\alpha xy} = (-1)^{\log_\alpha x} \cdot (-1)^{\log_\alpha y} = \psi(x)\psi(y)$
4. Bilanciamento:
$$\sum_{x=1}^{p-1} \psi(x) = \sum_{x=1}^{p-1} (-1)^{\log_\alpha x} = 0$$
5. Per gli elementi negativi, del tipo $y = -x$
$$\psi(y) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \psi(x)$$

2.3.7.2 Sequenze binarie di periodo massimo (m-sequences)

Tali sequenze sono ottenute da un LFSR del tipo in figura 2.3, in cui i fattori moltiplicativi f_i sono i coefficienti di un *polinomio primitivo* di grado pari a N, con $2^N - 1$ lunghezza del codice da generare.

I polinomi su GF(2) hanno coefficienti 0 o 1, e quindi i moltiplicatori indicati nello schema di figura 2.3 possono essere sostituiti semplicemente da interruttori aperti o chiusi. Inoltre, sebbene ciò non sia vero per campi di ordine superiore, in GF(2) i polinomi primitivi sono tutti e soli i polinomi *irriducibili*, ossia non fattorizzabili, e si trovano tabulati anche per gradi piuttosto elevati.

Gli elementi prodotti di volta in volta dall'LFSR devono poi essere mappati da $\{0, 1\}$ in $\{-1, 1\}$.

Proprietà delle m-sequences binarie

1. Sono sequenze *minimax*.
2. Sono sequenze *bilanciate*: infatti si dimostra che la differenza tra il numero di zeri ed uni che si ripetono sul periodo è sempre pari a 1. Non sarebbe possibile per tali sequenze avere media esattamente nulla, data la loro lunghezza dispari.
3. Due LFSR precaricati con valori diversi originano copie della stessa sequenza, una ritardata rispetto all'altra.
4. *Shift and add property*: La somma bit-a-bit di due repliche di una stessa sequenza, traslate ciclicamente una rispetto all'altra, è a sua volta una traslazione ciclica delle due sequenze di partenza, o la sequenza identicamente nulla se la traslazione è pari ad un periodo del codice.

2.3.7.3 Sequenze di Legendre

Questa classe comprende codici di tutte le lunghezze N con N primo tale che $N \bmod 4 = 3$. Presenta, quindi, un assortimento di sequenze minimax più vasto rispetto alle m-sequence. Per costruire una sequenza di Legendre si procede prendendo una successione di elementi di GF(p) con $p\,\mathrm{tale\,che}\,p \bmod 4 = 3$, e si applica a ciascun elemento della successione l'operatore di legendre.

Per costruire, ad esempio, una sequenza di Legendre di lunghezza 7 con il metodo indicato, si fanno le seguenti considerazioni:

- $7 \bmod 4 = 3$, quindi esiste una sequenza di Legendre della lunghezza richiesta.
- 3 è elemento primitivo in GF(7): $1 = 3^0$; $2 = 3^2$; $3 = 3^1$; $4 = 3^4$; $5 = 3^5$; $6 = 3^3$
- $\forall\, i \in [1, 7]\ \psi(i) = \log_3(i)\ ;\ \psi(0) = 1$

Ottenendo infine la sequenza: $+1 + 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1$.

2.3.8 Costruzione di sequenze per applicazioni CDMA

Nelle tecniche a multiplazione di codice è fondamentale che la correlazione tra due codici diversi, modulati da segnali informativi destinati ad "utenti" differenti, sia minima (idealmente nulla). In questo caso le sequenze ottime sono quelle ortogonali, che presentano crosscorrelazione zero. Le sequenze di Walsh-Hadamard sono famiglie di codici ortogonali disponibili per tutte le lunghezze esprimibili come potenza di 2, e prendono il nome di codici di Hadamard o di codici di Walsh, a seconda del criterio con cui sono ordinati in forma di matrice quadrata. L'ortogonalità non viene mantenuta in presenza di uno scostamento temporale tra due codici di Walsh, e questo ne limita l'impiego alle applicazioni CDMA **sincrone**.

Altri codici che hanno ottenuto grande successo per applicazioni CDMA sono gruppi di sequenze minimax, selezionate secondo uno specifico algoritmo, tra le quali le più note sono i cosiddetti *codici di Gold.* Tutte le sequenze di questo tipo (Gold, Kasami, Kamaletnidov...) hanno in comune il fatto che la crosscorrelazione tra due codici diversi, scelti in base al medesimo algoritmo, si mantiene al di sotto di un valore che può essere reso piccolo a piacere aumentando la lunghezza delle sequenze. Queste proprietà hanno reso tali famiglie di codici insostituibili in tutte le applicazioni CDMA asincrone, nelle quali il ricorso ai codici ortogonali è reso impraticabile dall'impossibilità di controllare la sincronia tra ricevitore e sorgente.

2.3.8.1 Codici di Walsh

Un algoritmo molto diffuso per ottenere codici di Walsh-Hadamard è la *regola di Sylvester:* si consideri la matrice di Hadamard $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, le righe (o equivalentemente le colonne data la simmetria) di tale matrice sono tra loro ortogonali, e costituiscono i codici di Walsh-Hadamard di lunghezza 2. Definiamo con $\otimes$ l'operazione tra due matrici A di dimensioni $a \times b$ e B di dimensioni $c \times d$ tale che $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1b}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{a1}B & \cdots & a_{ab}B \end{bmatrix}$, di dimensioni $ac \times bd$. La matrice di Hadamard H_M di dimensione $M \times M$, con M potenza di 2, si può ottenere iterando $\underbrace{H_2 \otimes H_2 \ldots \otimes H_2}_{\log_2 M \text{ volte}}$.

Gli M codici di Walsh-Hadamard di lunghezza M sono tutti espressi dalle righe (o dalle colonne) della matrice H_M, che contiene sempre una riga di soli uni, quindi con zero commutazioni del segno, ed una riga in cui due elementi contigui non hanno mai lo stesso segno. Ordinando le righe (o le colonne) della matrice di Hadamard in base al numero di cambi di segno della sequenza, si ottiene la matrice di Walsh W, anch'essa simmetrica. A titolo di esempio sono riportate le matrici di Hadamard e Walsh di dimensione 8; osservando la matrice W_8, si osserva che il numero di cambi di segno all'interno di ogni riga coincide con l'indice[5] della riga stessa, il che costituisce una proprietà valida per matrici di Walsh di qualsiasi dimensione.

$$H_8 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$W_8 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & +1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3.8.2 Codici di Gold

I codici di Gold sfruttano le seguenti proprietà delle m-sequence:

1. Data una m-sequence di lunghezza $L = 2^n - 1$, la sequenza che si ottiene selezionandone un elemento ogni d tra loro consecutivi, dove d non ha fattori a comune con L, è ancora una m-sequence con lo stesso periodo L.

[5] Se si fa partire la numerazione da zero.

2. Se la memoria n di una m-sequence è dispari, e non ha fattori in comune con d, la crosscorrelazione periodica (non normalizzata) di due m-sequence come quelle al punto 1 può assumere soltanto 3 valori: $\left\{\pm\sqrt{2(L+1)}-1,\,-1\right\}$.

3. Se n è pari, non multiplo di 4, e d è a sua volta pari, senza fattori a comune con $\frac{n}{2}$, la crosscorrelazione di cui al punto 2 può assumere soltanto 3 valori:
$\left\{\pm 2\sqrt{L+1}-1,\,-1\right\}$

Scelte due m-sequence di valori binari $\{0,\,1\}$ che rispettino le condizioni appena elencate, si possono ottenere 2^n+1 codici di Gold, impiegando un sistema del tipo in figura 2.4:

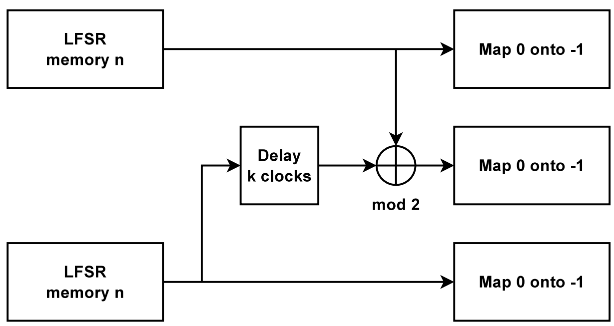


Figura 2.4: Generatore di codici di Gold

Le due m-sequence di partenza, prodotte da due registri LSFR, costituiscono esse stesse due codici di Gold, mentre gli altri codici si ottengono variando il ritardo k tra 1 e 2^n-1 e sommando modulo 2 come indicato nello schema.

In base alle ipotesi fatte sulle sequenze di partenza, si può dimostrare che il massimo valore del coefficiente di crosscorrelazione periodica tra due codici di Gold così ottenuti è pari a:

$$|\rho|_{max}=\begin{cases}\frac{\sqrt{2(L+1)}+1}{L} & \text{se}\, n\, \text{dispari}\\ \frac{2\sqrt{L+1}+1}{L} & \text{se}\, n = 2 \bmod 4\end{cases} \tag{2.27}$$

2.3.8.3 Codici di Kasami

Per ottenere un set di codici di Kasami si parte da una m-sequence di memoria pari $n=2h$, e si costruisce un'altra sequenza, che si può dimostrare essere ancora di periodo massimo, estraendo dalla prima i termini con cadenza 2^h+1.

Poichè la lunghezza L_1 della prima sequenza è tale che $L_1 = 2^n - 1 = (2^h - 1)(2^h + 1)$, il periodo della sequenza estratta è $L_2 = 2^h - 1$.

Si può utilizzare un sistema come quello di figura 2.5 per la generazione dei codici, in cui la sequenza di periodo L_1 e quella di periodo L_2 sono generate da registri LSFR rispettivamente di memoria n ed $\frac{n}{2}$. Si ottengono in totale 2^h codici di Kasami, dei quali uno di lunghezza L_1, detto "long code", ed i rimanenti $2^h - 1$ di lunghezza L_2.

La crosscorrelazione periodica tra due codici di Kasami assume come valore massimo:

$$|\rho|_{max} = \frac{\sqrt{L+1}+1}{L} \tag{2.28}$$

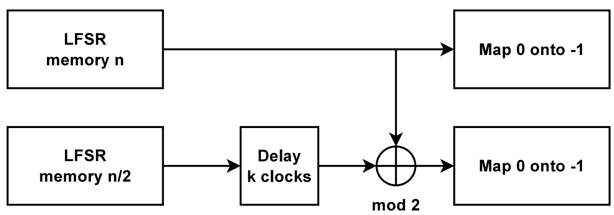


Figura 2.5: Generatore di codici di Kasami

Capitolo 3

Interfaccia di readout CDMA per sensori inerziali

Viene di seguito illustrato il percorso di analisi svolto nell'ambito di questo lavoro di tesi. È stata esplorata la possibilità di impiegare modulazioni di codice per la multiplazione di segnali analogici. In particolare si fa riferimento ai segnali in uscita da un giroscopio MEMS triassiale, quale quello integrato nel dispositivo SD746.

Inizialmente viene descritta l'architettura SD746, nella quale è in uso una tecnica a divisione di frequenza; si procede sostituendo le portanti impiegate in tale sistema con sequenze binarie per applicazioni CDMA. Una volta valutata l'efficacia della tecnica di modulazione proposta, sono stati compiuti tentativi per eliminare i blocchi di amplificazione e filtraggio a frequenza intermedia, necessari all'architettura originaria, spostando lo stadio di de-multiplazione dei segnali dal dominio analogico a quello digitale.

Dimostrata la praticabilità dell'approccio proposto, si è proceduto a valutarne le prestazioni in termini di cross-axis sensitivity.

3.1 Architettura attualmente in uso: SD746

3.1.1 Struttura del sensore giroscopico

Il giroscopio MEMS integrato nel sensore SD746 è composto da 8 masse, disposte ad angoli di 45° tra loro intorno ad una sospensione cardanica centrale (figura 3.1). Ognuna di queste masse viene attuata da un comb-drive in di-

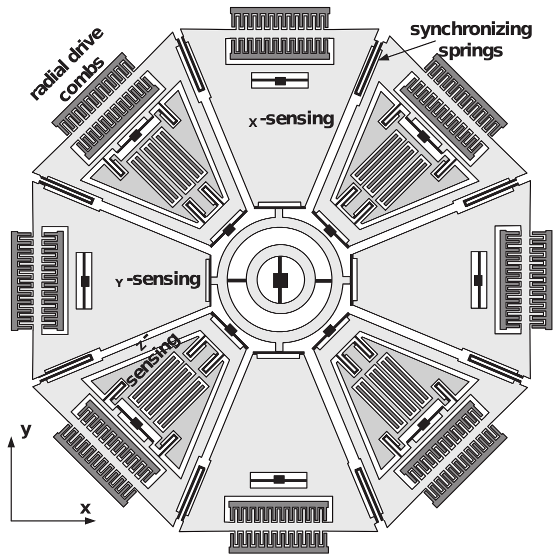


Figura 3.1: Schema del giroscopio MEMS integrato in SD746

rezione radiale, e le oscillazioni sono sincrone, con le distanze delle masse dal centro della struttura che variano in fase tra loro. Quattro delle masse attuate, disposte a 90° tra loro, a due a due allineate secondo gli assi x ed y, sono collegate alla sospensione centrale ad una estremità, ed ancorate al substrato all'estremità opposta. Le rotazioni del dispositivo intorno all'asse x producono forze di Coriolis agenti in direzione z, con verso opposto sulle due masse mobili[1] allineate lungo y, le cui estremità rivolte verso il centro della struttura possono inclinarsi rispetto al substrato, facendo perno sul vincolo posto all'altra estremità. In modo analogo una velocità di rotazione rispetto all'asse y agisce sulle masse allineate lungo x. Le forze di Coriolis producono una variazione della capacità differenziale misurata tra ciascuna coppia di masse e gli elettrodi sottostanti, che viene posta direttamente in relazione con Ω_x ed Ω_y. La componente Ω_z della velocità angolare viene rilevata in corrispondenza delle restanti quattro masse, non collegate alla sospensione cardanica, ciascuna delle quali è in realtà un sistema di due masse in configurazione driving-frame-based, con la massa di driving ancorata al substrato, analogo alle architetture descritte nel capitolo introduttivo.

[1]Le due masse oscillano lungo l'asse con verso opposto: esse si avvicinano e si allontanano dal centro della struttura simultaneamente.

Gli attuatori elettrostatici utilizzati sono, a differenza di quanto si vede in figura 3.1, separati ciascuno in due parti: una porzione centrale, alimentata dal segnale di driving, che esercita la sollecitazione, e due porzioni marginali, mantenute a tensione costante, con lo scopo di generare un segnale proporzionale all'oscillazione di driving, detto "motor".

3.1.2 Interfacciamento del sensore

In figura 3.2 è riportato in forma molto semplificata lo schema a blocchi del front end per il giroscopio integrato nell' SD746.

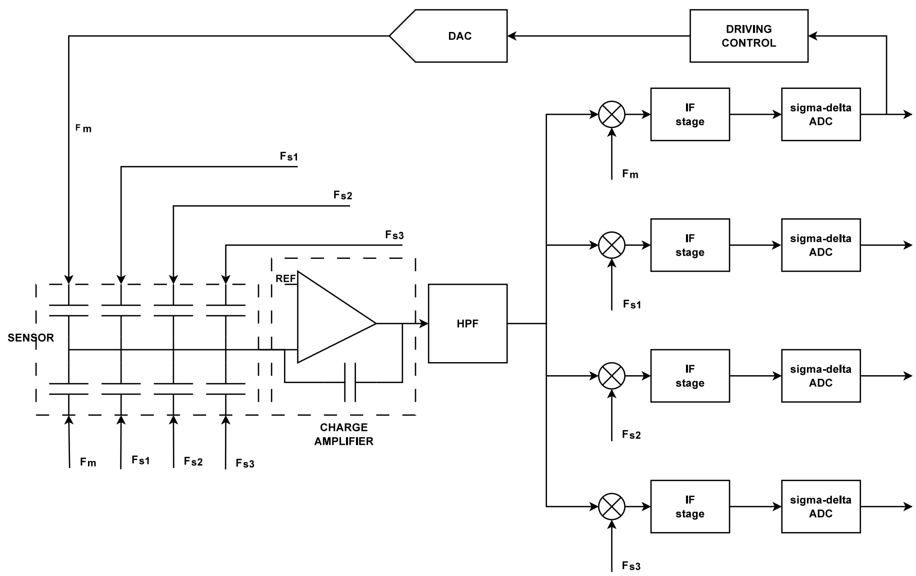


Figura 3.2: Interfaccia FDMA di SD746.

Il front end analogico esegue la lettura simultanea di quattro segnali provenienti dal sensore:

- I tre segnali riferiti alle tre componenti della velocità angolare.
- Il segnale di "motor", che rileva l'oscillazione di driving, per stabilizzarne la frequenza controllando gli attuatori in retroazione.

I segnali appena elencati giungono all'interfaccia di lettura attraverso lo stesso canale, poichè l'uscita del sistema consiste nella tensione letta in corrispondenza della sospensione centrale. Le masse vibranti sono in corto circuito tra loro, e quindi sul canale di uscita si sovrappongono gli effetti dell'accoppiamento capacitivo delle diverse masse con gli elettrodi di sensing collocati sul substrato. Alla tensione di polarizzazione degli elettrodi di sensing vengono sovrapposte delle onde quadre, di frequenza diversa a seconda dell'asse di rotazione al quale sono riferiti i segnali da essi generati. Tali segnali variabili applicati agli elettrodi di sensing realizzano una modulazione chopper del segnale; l'informazione relativa ai diversi assi viene collocata in frequenza su porzioni di spettro distinte, realizzando quindi una multiplazione FDMA. Le armoniche fondamentali delle onde quadre si trovano a frequenze molto maggiori di quelle di risonanza per il sistema meccanico, ed il loro effetto sulla dinamica della struttura è quindi trascurabile. Si sottolinea che, data la natura differenziale dell'interfaccia capacitiva, le onde quadre sono applicate in opposizione di fase all'interno di ciascuna coppia di elettrodi.

Il front end analogico opera una demodulazione sincrona del segnale FDMA, dopo che questo ha subito l'amplificazione da parte di un singolo amplificatore di carica ed un filtraggio passa-alto. Successivamente i quattro segnali distinti subiscono indipendentemente amplificazione, filtraggio anti-aliasing e digitalizzazione attraverso un convertitore sigma-delta. La parte analogica della catena di trattamento del segnale compresa tra la demodulazione sincrona e la conversione A/D viene detta "blocco a frequenza intermedia", e ricopre un ruolo tutt'altro che marginale in termini di ingombro sul chip e di consumo di corrente. Il termine "frequenza intermedia" deriva dal fatto che a questo stadio i segnali sono essenzialmente modulazioni DSB intorno alla frequenza di driving (circa 20 kHz), nella cui ampiezza è contenuta l'informazione circa la velocità angolare intorno ad uno specifico asse.

3.2 Inquadramento del problema

Stadio a frequenza intermedia La digitalizzazione dei segnali prodotti dal sensore giroscopico avviene a frequenza intermedia, impiegando un totale di 4 convertitori $\Sigma - \Delta$, uno per ciascun segnale. Questo rende necessari quattro stadi di amplificazione e filtraggio a frequenza intermedia, che richiedono circa il 24% della superficie complessiva del chip.

Flessibilità della modulazione Nell'architettura in uso per l'SD746 si è posta la necessità di operare la multiplazione di quattro segnali sullo stesso canale. Per raggiungere questo obiettivo è stata impiegata una tecnica FDMA basata sulla modulazione di onde quadre a frequenza diversa. Tali onde sono segnali di clock ottenuti da un "master clock" impiegando divisori di frequenza; questo fatto impone un'attenta scelta delle onde quadre, in modo tale che gli spettri dei segnali modulati siano il più possibile separati in frequenza.

Si può facilmente immaginare che aumentando la complessità del sensore, e quindi il numero di segnali prodotti, la difficoltà di ripartire lo spettro cresca rapidamente, fino a diventare un problema ingestibile, e peraltro la cura di questo aspetto in fase di progetto dell' SD746 ha richiesto notevoli sforzi.

Architettura CDMA proposta In figura 3.3 è riportato lo schema a blocchi del sistema al quale è stato rivolto lo studio esplorativo intrapreso in questa tesi.

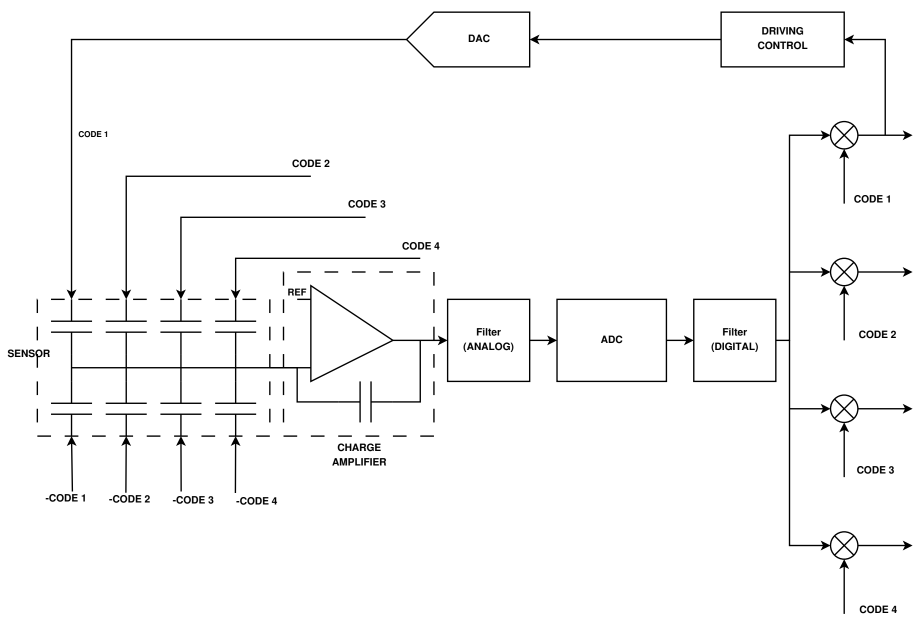


Figura 3.3: Architettura proposta.

Si nota che rispetto alla figura 3.2 la demodulazione è stata spostata "a valle" lungo la catena di trattamento del segnale, e che è scomparso lo stadio a frequenza intermedia, mentre la conversione in digitale avviene ad opera di un singolo ADC, che riceve in ingresso la sovrapposizione dei quattro segnali prodotti dal sensore, modulati da codici diversi.

La de-multiplazione avviene nel dominio digitale, per mezzo di semplici moltiplicazioni per ± 1 ad opera del DSP[2]. Riducendo ingombro e consumi legati all'impiego di un demodulatore analogico.

3.3 Considerazioni di dimensionamento e problemi generali

Di seguito vengono evidenziati alcuni aspetti delle modulazioni di codice nel dominio del tempo e della frequenza, mettendo in risalto le differenze sostanziali del loro utilizzo in ambito analogico rispetto a quello delle trasmissioni numeriche. Si prosegue ponendo l'attenzione sulle distorsioni dovute alla risposta in frequenza del canale, considerata di tipo passa-banda. Dopo alcune considerazioni generali con il canale dedicato ad un singolo ingresso, si passa a considerare le potenzialità delle tecniche a suddivisione di codice per segnali analogici, puntando l'attenzione sull'interferenza mutua tra i segnali multiplati (crosstalk). Infine viene descritto in che modo si è cercato di sfruttare l'analisi eseguita per sondare le potenzialità di impiego del CDMA sull'architettura proprietaria SD746.

3.3.1 Modulazioni di codice per segnali analogici

In letteratura non sono stati trovati esempi significativi di multiplazioni di codice per segnali analogici, fatta eccezione per [1]. È stato quindi opportuno approfondire l'effetto di queste modulazioni su segnali di tipo non numerico. In particolare è stata compiuta una serie di analisi impiegando forme d'onda sinusoidali, quali, per intervalli di tempo in cui la velocità angolare non varia significativamente, si considerano le grandezze elettriche prodotte in uscita da un giroscopio vibrante.

3.3.1.1 Modulazione e demodulazione di un'onda sinusoidale

In figura 3.4 è riportato il segnale ottenuto modulando un'onda sinusoidale con un codice binario che assume valori $+1$, -1. La forma d'onda è fortemente distorta, ma può essere perfettamente ricostruita, in linea di principio, rimoltiplicando in modo sincrono il segnale modulato per una replica del codice.

[2]Digital Signal Processor

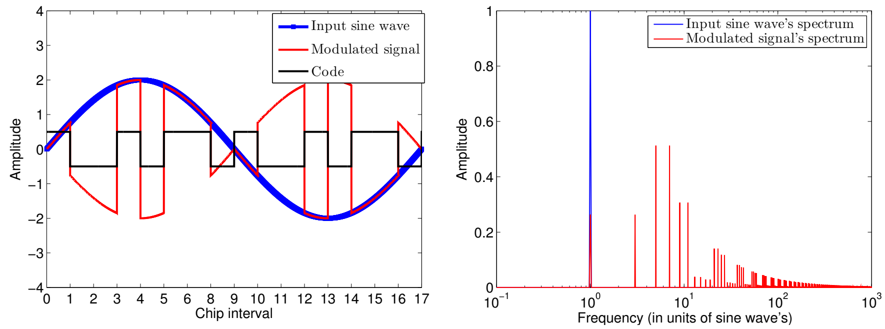


Figura 3.4

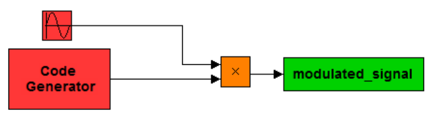


Figura 3.5: Modulatore

L'effetto della modulazione di codice è visualizzato anche nel dominio della frequenza, confrontando gli spettri di ampiezza del segnale modulato (in rosso) e della sinusoide originaria (in blu). Si nota come la maggior parte dell'energia, concentrata per la sinusoide alla frequenza F_s, viene distribuita con la modulazione su un'ampia porzione di spettro, in linea con il carattere "spread spectrum" di tutte le modulazioni di codice.

La modulazione alla quale si è fatto riferimento è rappresentata nello schema a blocchi di figura 3.5, e si presenta come un procedimento analogo a quello impiegato per segnali digitali. Sussistono tuttavia alcune differenze sostanziali.

Una modulazione digitale BPSK, come ricordato nel capitolo introduttivo, codifica l'informazione nella fase della portante, che assume a istanti discreti i valori 0 o π. Durante l'intervallo di chip il segnale è una porzione di onda sinusoidale per la quale tutti i parametri sono idealmente costanti; in questo intervallo di tempo transita un singolo bit di informazione, e nei limiti entro i quali è possibile, per il ricevitore, *decidere* tra i due valori consentiti per la fase dell'onda sinusoidale trasmessa, la forma del segnale non riveste alcun interesse. L'impiego delle modulazioni di codice in ambito analogico costituisce un campo poco esplorato, come si evince dalla scarsissima bibliografia reperibile al riguardo. In questo caso i segnali informativi sono continui tempo-continuo, e dopo la demodulazione la forma complessiva dell'onda ricostruita deve essere quanto più possibile "analoga" al segnale di partenza, almeno entro i limiti di accuratezza richiesti dalla specifica applicazione.

3.3.1.2 Risposta del canale

Attraversando il canale[3], caratterizzato da una certa risposta in frequenza, il segnale modulato subisce un filtraggio, da cui segue che rimoltiplicando per il codice non si ha una perfetta ricomposizione dello spettro del segnale originario. Nel caso d'interesse, ovvero per i giroscopi vibranti, il canale assume tipicamente una risposta passa banda, in linea con il fatto che i segnali prodotti dal sensore sono intrinsecamente di tipo passa-banda. Ciò comporta vantaggi per l'attenuazione dei disturbi a bassa frequenza.

In seguito ad una modulazione di codice, l'ampliamento dello spettro dei segnali informativi richiede una banda adeguatamente ampia per il canale, in relazione alla possibilità di ricostruire l'andamento della grandezza d'interesse.

3.3.2 Considerazioni sullo spettro delle sequenze

Una sequenza binaria può essere vista come una sommatoria di impulsi rettangolari di ampiezza unitaria, distinti solo dal segno, traslati nel tempo uno rispetto all'altro della loro durata T (figura 3.6). La trasformata di Fourier di ciascuno di questi impulsi si può esprimere come:

$$\pm \mathrm{rect}\left(\frac{t-nT}{T}\right) \rightleftharpoons \pm T \mathrm{sinc}\left(fT\right) e^{-\jmath 2\pi f n T} \tag{3.1}$$

Per la linearità della trasformata di Fourier lo spettro complessivo di una sequenza binaria è dunque pari alla somma di un certo numero di seni cardinali, ciascuno moltiplicato per un esponenziale complesso, che oltre al segno dell'impulso[4] tiene conto dello sfasamento legato alla sua collocazione lungo l'asse temporale (equazione 3.1). Lo spettro di ampiezza dipende dalle relazioni di fase tra le diverse *sinc* che vengono a sommarsi, ma il suo valore per ciascuna frequenza non può mai superare quello ottenuto nell'ipotesi che tutti i contributi siano in fase. Poichè $|\mathrm{sinc}\left(\alpha f\right)| \leq \frac{1}{\pi\alpha f}\,\forall\, f$, lo spettro di ampiezza di una

[3] In questa tesi con il termine "canale" si fa riferimento agli stadi iniziali di amplificazione e filtraggio del front end, costituiti da un amplificatore di carica e da un filtro passa-alto.

[4] Il segno negativo incrementa la fase di π rad

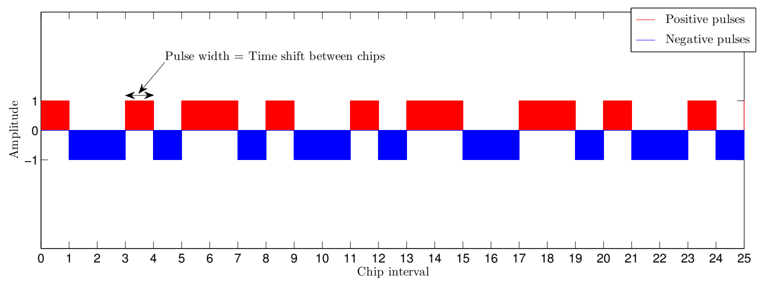


Figura 3.6: Sequenza di impulsi rettangolari.

sequenza di lunghezza L è sempre maggiorato dalla funzione:

$$A(f) = \sum_{i=1}^{L} T\left|\operatorname{sinc}\left(Tf\right)\right| \leq \frac{L}{\pi f} \tag{3.2}$$

Per una sequenza che si ripete con periodo P, si possono ricavare i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier campionando in frequenza la trasformata $\tilde{S}(f)$ del suo intervallo fondamentale, di durata $T_0 = PT$, a intervalli $\frac{1}{T_0}$. Il k-esimo coefficiente della serie di Fourier in forma complessa assume il valore $\tilde{S}_k = \frac{1}{T_0}\tilde{S}(\frac{k}{T_0})$, per cui dalla 3.2:

$$\tilde{S}_k \leq \frac{P}{\pi}\frac{1}{fT_0} = \frac{1}{\pi fT} \tag{3.3}$$

Facendo riferimento alla trasformata di Fourier monolatera, il limite espresso nella 3.2 raddoppia, e la 3.3 diviene, per i coefficienti di Fourier in forma trigonometrica:

$$S_k \leq \frac{2}{\pi fT} \tag{3.4}$$

Dalle considerazioni precedenti si deducono i seguenti aspetti riguardanti lo spettro di una sequenza periodica binaria:

- La separazione in banda $\frac{1}{T_0} = \frac{1}{TP}$ tra due armoniche consecutive è inversamente proporzionale al “tempo di chip” T. Per codici a media nulla lo stesso andamento interessa il limite inferiore di banda, ancora pari a $\frac{1}{T_0}$. Il limite di ampiezza per le armoniche (equazione 3.4) presenta anch’esso andamento $\propto \frac{1}{T}$.

- L’effetto del parametro P sul limite inferiore di banda e sulla densità di armoniche è lo stesso visto per T al punto precedente. L’ampiezza delle armoniche resta però maggiorata dalla 3.4, in cui non compare alcuna dipendenza da P.

- La sequenza che presenta periodo T_0 minimo, con T fissata, è l'onda quadra (periodo $P = 2$), per la quale continua a valere la 3.4. L'armonica fondamentale è in questo caso posta a frequenza massima, e tra due armoniche successive si ha il massimo intervallo frequenziale possibile.
- Per l'onda quadra i coefficienti della serie trigonometrica di Fourier si ottengono sostituendo nella 3.4 i valori di $f = \frac{k}{2T}$ multipli della fondamentale. In questo caso la 3.4 diviene infatti l'uguaglianza $S_k = \frac{4}{\pi k}$; ciò implica che le componenti significative dello spettro raggiungono frequenze più elevate per l'onda quadra rispetto alle altre sequenze.

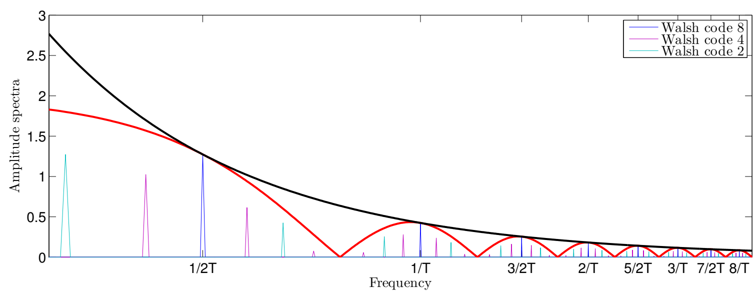


Figura 3.7: Spettri di ampiezza di alcune funzioni di Walsh di lunghezza 8. Il grafico è consistente con le considerazioni fatte circa posizione ed ampiezza delle armoniche.

Ulteriori considerazioni sui codici di Walsh Si osserva che le armoniche rappresentate in figura 3.7 per 3 diversi codici di Walsh riassumono gli spettri di ampiezza di tutte le 7 sequenze a media nulla di lunghezza 8.

Per verificare l'esattezza di quanto appena affermato si riconsideri l'algoritmo di Sylvester per la costruzione della matrice di Hadamard; le righe della matrice di Hadamard H_N rappresentano come si è visto tutti i codici di Walsh di lunghezza N. Ad ogni iterazione dell'algoritmo di Sylvester, le righe della matrice H_N che si ottiene possono dividersi in due gruppi:

1. Le righe nella metà superiore della matrice sono semplicemente date dalla ripetizione delle righe della matrice di Hadamard al passo precedente, e i codici che si ottengono mantengono invariato il periodo.

2. Le righe sottostanti si possono vedere come il prodotto di due codici: il primo di periodo N, nel quale i primi $\frac{N}{2}$ elementi assumono valore $+1$ ed i restanti valore -1, mentre il secondo codice è uno di quelli contenuti nella metà superiore della matrice. Il periodo dei codici che si ottengono è dato ovviamente dal minimo comune multiplo tra i periodi dei due "fattori".

Al passo 0 dell'algoritmo di Sylvester si dispone della matrice $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; dalla prima riga si origina la sequenza costante, poniamo di periodo 1, mentre la seconda genera un'onda quadra (periodo 2). In base alle considerazioni fatte ai punti 1 e 2, si deduce che le righe della matrice H_4 possono presentare solo periodo 1, 2 o 4, e in effetti:

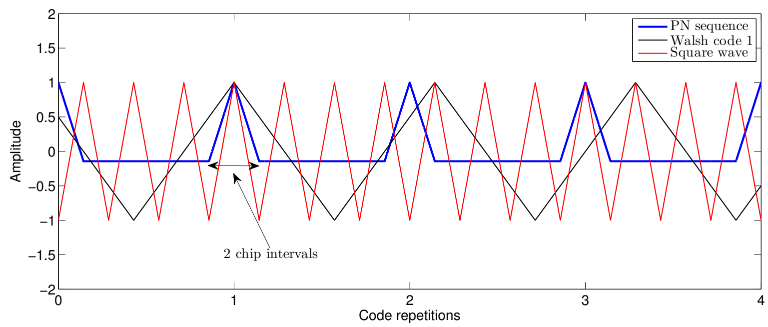
$$H_4 = \begin{pmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{pmatrix}$$

confrontando le sequenze ottenute dalla terza e quarta riga della matrice si evidenzia il fatto che esse sono semplicemente repliche traslate della stessa sequenza, ortogonali sul periodo:

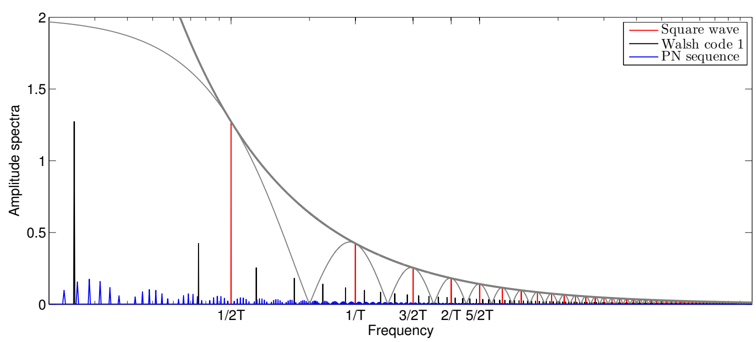
$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & +1 & +1 & -1 & -1 & +\mathbf{1} & +\mathbf{1} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & +1 & +1 & -1 & \cdots \\ \cdots & +1 & -1 & -1 & +1 & +\mathbf{1} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & +\mathbf{1} & +1 & -1 & -1 & \cdots \end{array}$$

Proseguendo nell'iterazione dell'algoritmo di Sylvester si verifica facilmente che, periodicizzando i codici contenuti nella generica matrice di Walsh di dimensione N, le sequenze ottenute possono avere soltanto un periodo esprimibile come potenza di 2, compreso nell'intervallo $\left[2, \ldots, 2^{\log_2 N}\right]$. In totale sono quindi disponibili soltanto $\log_2 N$ sequenze che presentano uno spettro di ampiezza diverso tra loro.

Confronto tra codici ortogonali e sequenze minimax Un modo classico di inquadrare velocemente le caratteristiche spettrali di una data famiglia di codici si basa sull' equivalenza tra densità spettrale di potenza e funzione di autocorrelazione di un segnale, dimostrata dal teorema di Wiener-Khintchin. Il principio di indeterminazione, valido per qualsiasi coppia segnale-trasformata, consente di affermare che un codice dovrà presentare una banda tanto più ampia quanto più l'energia della sua funzione di autocorrelazione è concentrata su un intervallo di tempo ridotto; ciò è in accordo con le caratteristiche spettrali di tutte le sequenze minimax e dei codici da esse derivati, come ad esempio i codici di Gold. Per tutte queste sequenze il modulo della funzione di autocorrelazione ha periodo massimo, pari alla loro durata; anche da questo si deduce che il loro spettro è costituito da una fitta corte di armoniche. Poichè le sequenze di impulsi considerate hanno tutte ampiezza unitaria, esse presentano tutte la stessa potenza; è chiaro quindi che segnali con ampio spettro ed elevata densità di armoniche hanno uno spettro di ampiezza che assume valori più bassi ed omogenei rispetto a segnali di periodo più breve, quali l'onda quadra. In figura 3.8a sono poste a confronto una sequenza minimax di periodo 7 con il segnale ottenuto periodicizzando i codici di Walsh numero 2, 7 e 8 del set di lunghezza 8; ovviamente per tutti e tre i segnali la durata T dell'intervallo di chip è la stessa.



(a)



(b)

Figura 3.8

3.3.2.1 Scelta dei codici in base alle caratteristiche spettrali

Prendendo a riferimento il grafico 3.8b si può dedurre che lo spettro di un segnale modulato da una sequenza minimax è soggetto a forte aliasing, a causa della sovrapposizione delle sue repliche in banda. È prevedibile che, in un sistema a banda stretta, la maggior parte dell'energia del segnale modulato non raggiunga il demodulatore, con conseguenze negative in termini di SNR.

Il punto di forza delle modulazioni di codice che, in campo digitale, impiegano sequenze minimax, risiede nel fatto che il segnale modulato tende a confondersi con il rumore di fondo del sistema di comunicazione, è può essere ricostruito solo impiegando il codice opportuno. Questa proprietà di "disperdere" il contenuto frequenziale del segnale modulato su uno spettro molto ampio è evidente anche dalla figura 3.8b; l'efficacia delle sequenze minimax nella modulazione di segnali analogici sarà oggetto di simulazioni nel seguito della tesi.

Per quanto riguarda le modulazioni con codici ortogonali, queste si avvicinano concettualmente, nel dominio della frequenza, alla modulazione chopper classica, anche se cambia la distribuzione dell'energia tra le diverse armoniche per le sequenze diverse dall'onda quadra (figura 3.7). Per rendere la multiplazione più "robusta" nei confronti degli errori di fase legati alla risposta del canale, si può pensare di selezionare per i diversi segnali codici con spettri di ampiezza non coincidenti; nel caso di quattro segnali da multiplare la scelta ricade sui codici di lunghezza ≥ 16.

3.3.3 Modello di test

Il front end del dispositivo SD746 costituisce un'architettura proprietaria. Un modello funzionale è stato gentilmente offerto da SensorsDynamics AG per questo lavoro di tesi, ma è stato richiesto di non divulgarne i dettagli numerici. Per questo motivo, e considerando più appropriato, per una tesi esplorativa, rifarsi a modelli semplici in un'ottica di maggiore generalità, sono stati realizzati autonomamente dal candidato modelli Simulink semplificati dei blocchi proprietari, liberi da vincoli di divulgazione. Le considerazioni teoriche sviluppate intorno al modello astratto vengono poi applicate al modello fornito dall'azienda, per verificarne la validità di massima.

In questa sezione prendiamo in esame lo schema di figura 3.9, che costituisce il modello Simulink/Matlab utilizzato per valuatare le prestazioni delle modulazioni di codice in un sistema concettualmente simile all'architettura

SD746. I risultati ottenuti vengono interpretati alla luce delle considerazioni precedentemente svolte sulle proprietà dei codici.

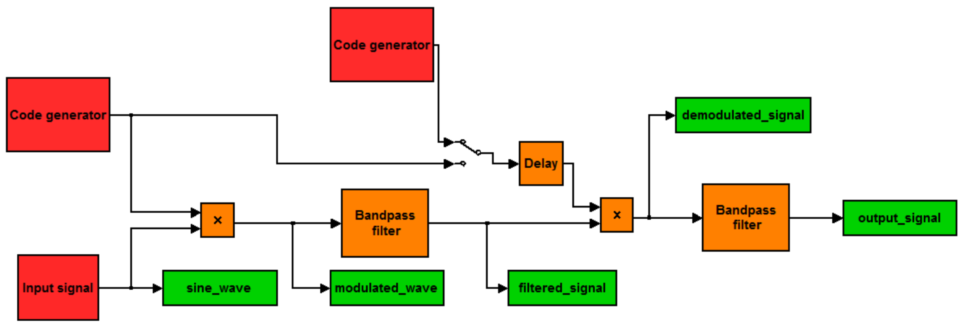


Figura 3.9

Il segnale modulato è ottenuto moltiplicando l'ingresso per la sequenza periodica di impulsi prodotta dal generatore di codice; dopo l'attraversamento del canale, ed il relativo filtraggio, il segnale viene rimoltiplicato per una copia del codice, eventualmente ritardata per compensare il ritardo introdotto dal canale, qualora si intenda ricostruirne l'andamento. Il ritardo ottimo viene stimato con una procedura trial & error, visualizzando lo spettro in uscita per diversi valori del parametro, e scegliendo quello in grado di massimizzare il rapporto segnale rumore. Nel caso in cui si effettuino misure di crosstalk, un interruttore consente di applicare in ingresso al demodulatore un codice diverso da quello impiegato per modulare il segnale. Ciò allo scopo di valutare l'efficacia della modulazione per estrarre dal segnale multiplato il segnale informativo d'interesse, reiettando il contributo degli altri sull'uscita.

Alla fine della catena di blocchi un filtro attenua le componenti spettrali indesiderate che restano dopo la demodulazione, a causa della risposta non ideale del canale e/o della non ortogonalità dei codici impiegati. Il canale è rappresentato dalla funzione di trasferimento:

$$Ch(s) = \frac{10^6 s}{(s + 10^4)(s + 10^6)}$$

cui corrisponde il diagramma di Bode in figura 3.10, sul quale è evidenziata la banda a -3 dB centrata intorno a 20 kHz.

Il filtro posto dopo la demodulazione ha anch'esso risposta bassa-banda, centrata anche in questo caso intorno a 20 kHz, frequenza della sinusoide di prova

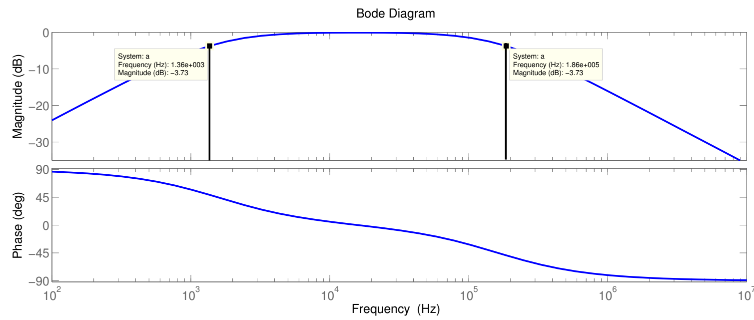


Figura 3.10:

in ingresso al sistema. La sua funzione di trasferimento è:

$$\frac{2 \cdot 10^{11} s^2}{(s + 4 \cdot 10^4)^2 (s + 4 \cdot 10^5)^2}$$

e il diagramma di bode è riportato in figura 3.11.

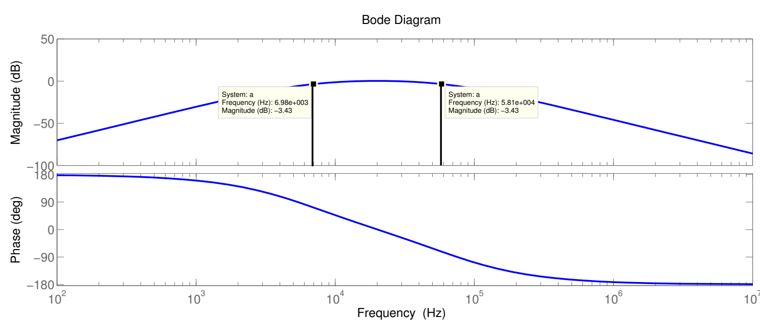


Figura 3.11

In seguito sono esposti i risultati di simulazione per il sistema appena descritto, in cui il segnale analogico di prova applicato in ingresso è una sinusoide a 20 kHz, la quale è circa la frequenza dell'oscillazione di driving per il giroscopio integrato nell'SD746. Sono valutate le prestazioni dell'interfaccia CDMA semplificata al variare di tre parametri: tipo di codice impiegato, lunghezza del codice, frequenza di chip. I risultati ottenuti forniscono indicazioni utili per la messa a punto di un sistema basato su una tecnica di multiplazione a suddivisione di codice.

3.3.3.1 Impiego di codici ortogonali

Sono state effettuate diverse simulazioni con l'impiego di codici di Walsh sul sistema di figura 3.9. I risultati seguenti sono stati ottenuti utilizzando la matrice di Walsh di ordine 16 per generare le sequenze periodiche necessarie.

Inizialmente sono stati scelti, basandosi sulle considerazioni ai paragrafi precedenti, i codici 2, 4, 8 e 16 della matrice W_{16}. Tali codici presentano armoniche separate in frequenza, e ciò lascia prevedere livelli di crosstalk minori a fronte delle distorsioni di fase introdotte dal canale.

Una volta trovati i valori ottimi per il ritardo secondo la procedura descritta, il sistema è stato simulato impiegando lo stesso codice in fase di modulazione e demodulazione per tutti e quattro i casi, con durata dei chip pari a $1\,\mu s$. I risultati sono esposti in figura 3.12, nel dominio del tempo e della frequenza, per il codice numero 2:

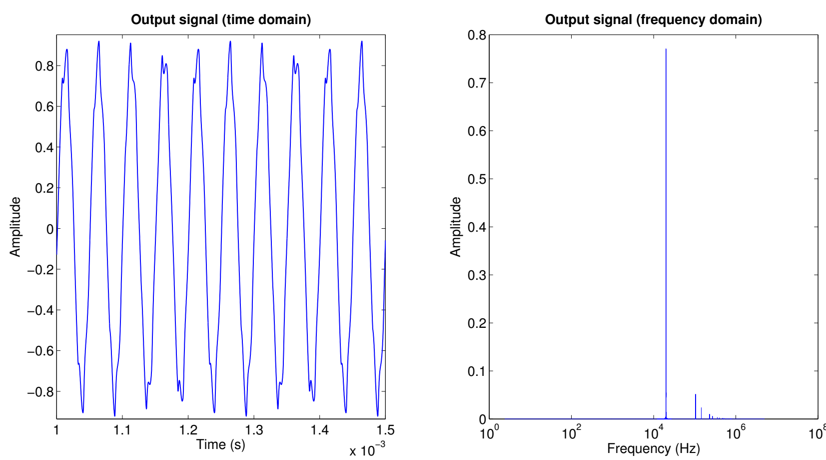


Figura 3.12

Si osserva una buona qualità dell'onda ricostruita in uscita, ma i risultati ottenuti variano al variare del codice, significativamente, in termini di potenza del segnale in uscita. Ad esempio, usando il codice 16 (onda quadra a 500 kHz) si ottiene il risultato di figura 3.13.

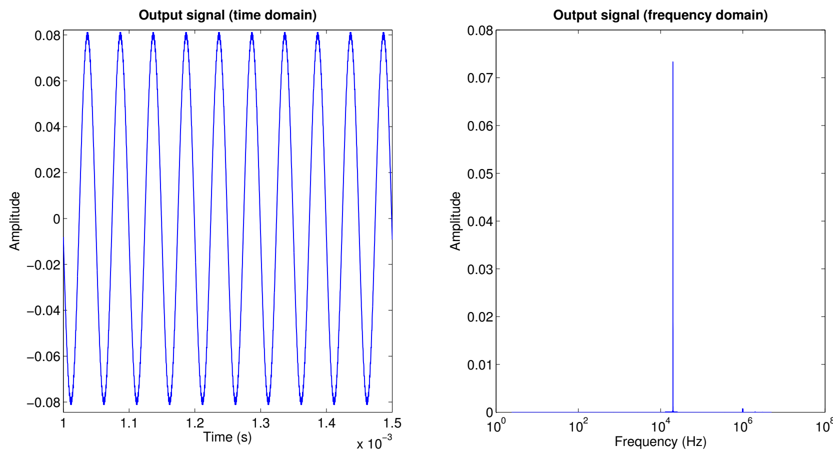


Figura 3.13

Anche in questo caso l'andamento della sinusoide, ancorchè molto attenuato, è ben riconoscibile, ed in particolare l'oscillazione in uscita è alla stessa frequenza dell'ingresso. Inserendo nel modello le sorgenti di rumore, il diverso guadagno tra ingresso ed uscita per i diversi codici può destare preoccupazione, tuttavia è opportuno sottolineare che il modello astratto in uso a questo punto non presenta stadi di guadagno, e che dopo la demodulazione i guadagni possono essere regolati diversamente per i diversi canali.

Per completezza includiamo anche l'andamento dell'uscita per i codici 4 e 8 (rispettivamente figura 3.14e figura 3.15).

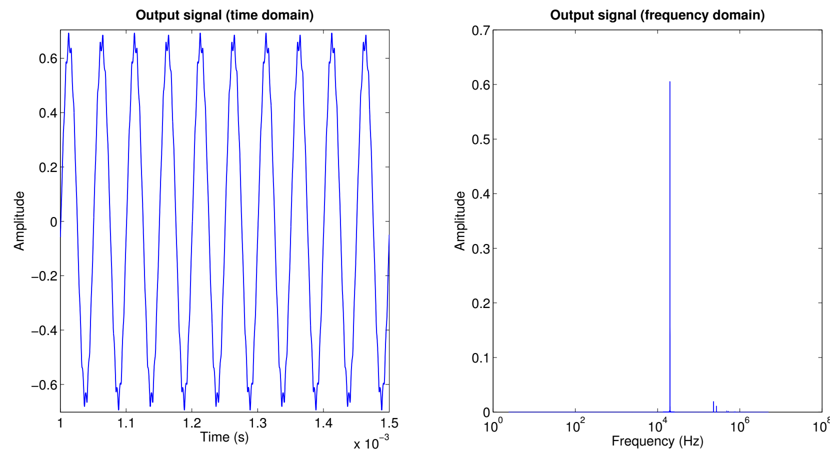


Figura 3.14

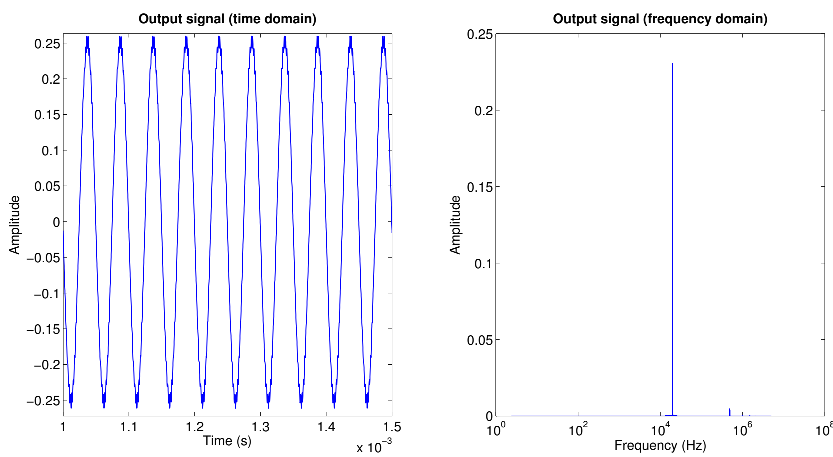


Figura 3.15

Il motivo del diverso fattore di attenuazione riscontrato al variare del codice è da ricercarsi nello spettro delle sequenze, in relazione alla banda del canale. Ad esempio, confrontando il segnale modulante ottenuto dalla seconda riga della matrice di Walsh (codice 2) con il codice 16, si osserva che si tratta in entrambi i casi di onde quadre, la prima di periodo 16, la seconda di periodo 2 (intervalli di chip). Il codice numero 2 ha l'armonica fondamentale 3 ottave più in alto in frequenza rispetto all'altro, e la stessa relazione vale per la distanza tra due armoniche consecutive dei due codici. In figura 3.20 lo spettro del

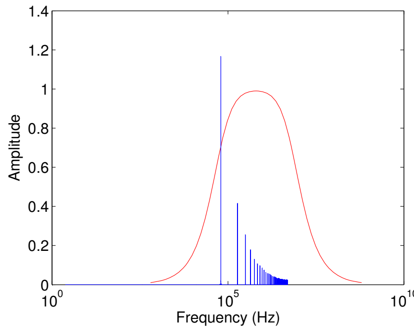


Figura 3.16: Codice di Walsh #2 (periodo 16)

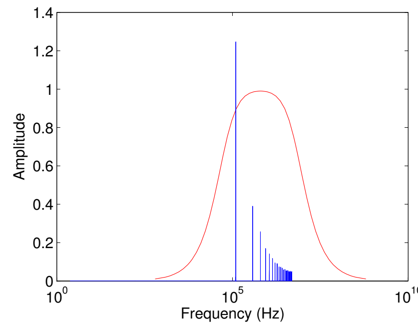


Figura 3.17: Codice di Walsh #4 (periodo 8)

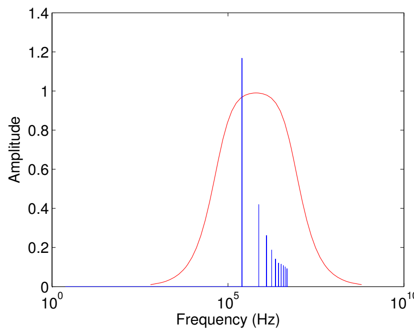


Figura 3.18: Codice di Walsh #8 (periodo 4)

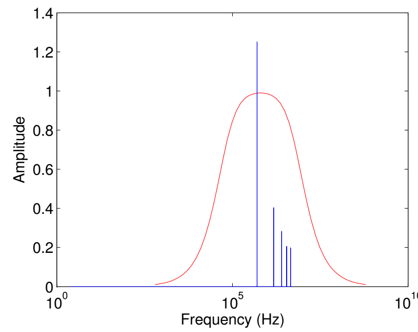


Figura 3.19: Codice di Walsh #16 (periodo 2)

Figura 3.20

segnale modulato è messo in relazione con la banda del canale, per tutti e quattro i casi di cui sopra; si nota che l'onda quadra di periodo 2 presenta una forte attenuazione delle armoniche a frequenza elevata, e ciò si ripercuote sulle repliche spettrali del segnale da essa modulato. All'opposto, la sequenza più "lenta", di periodo 16, colloca più componenti spettrali all'interno della banda del canale.

Le prestazioni in termini di crosstalk sono state valutate utilizzando codici diversi per modulare e demodulare il segnale; i risultati ottenuti per le varie combinazioni sono analoghi in termini di reiezione del segnale in uscita, ad esempio modulando la sinusoide di ingresso con il codice 2 e demodulando con il codice 16 si ottiene in uscita il segnale di figura 3.21. Modulando con il codice 3 e demodulando con il codice 4, i cui spettri si sovrappongono, la stessa simulazione dà il risultato di figura 3.22; come previsto, le prestazioni in termini di crosstalk sono visibilmente peggiorate: si ottiene una componente a 20 kHz in uscita, ancorchè attenuata, che non può essere ovviamente eliminata con un filtro più selettivo.

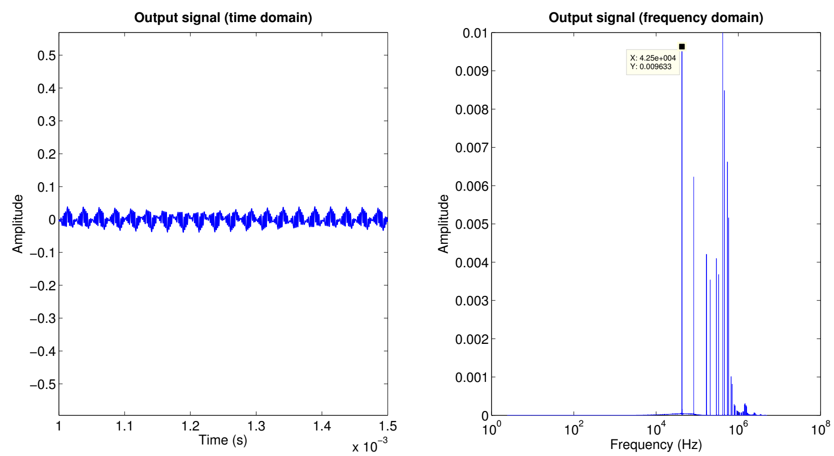


Figura 3.21

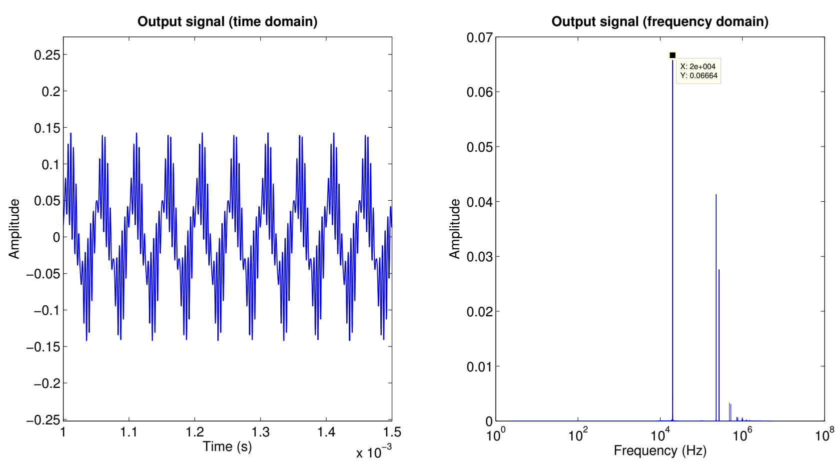


Figura 3.22

Vale la pena verificare brevemente il comportamento del sistema al cambiare della durata dell'intervallo di chip. In figura 3.23 viene mostrata la ricostruzione

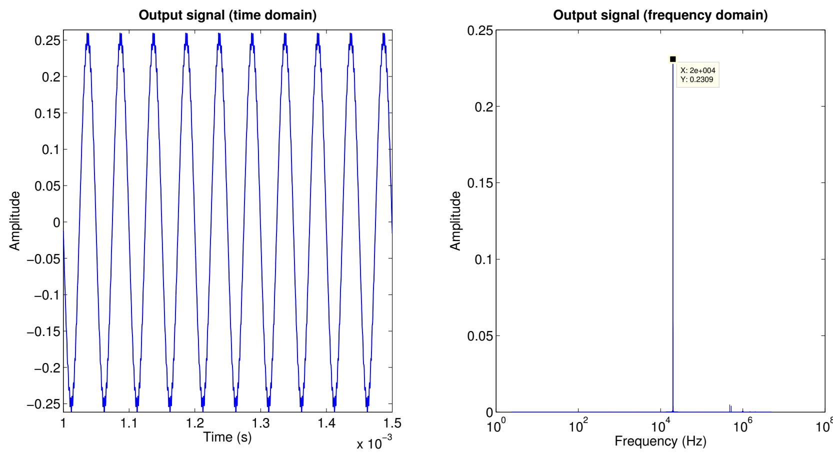


Figura 3.23

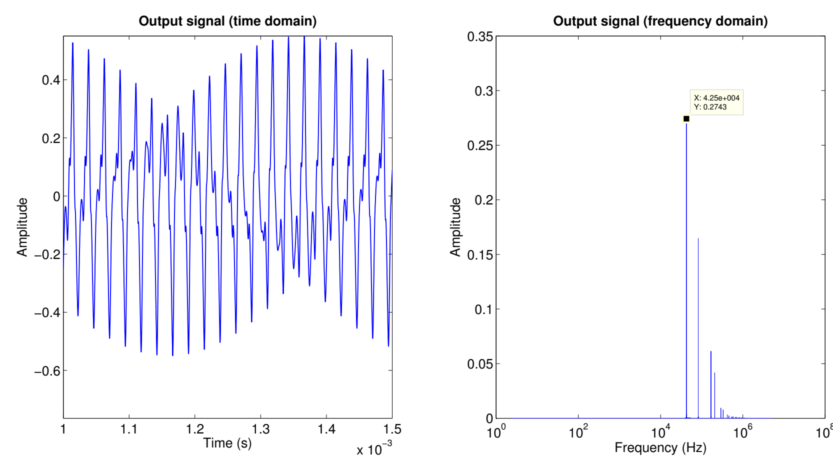


Figura 3.24

del segnale modulato dalla sequenza 16 per il nuovo valore della frequenza di chip, mentre in figura 3.24 il segnale d'ingresso viene modulato dal codice 2, e la demodulazione avviene secondo il codice 16.

Confrontando la figura 3.23 con la 3.13 si osserva un aumento dell'ampiezza del segnale ricostruito, a fronte però di un notevole peggioramento del crosstalk (figura 3.24 vs 3.21). Aumentando ancora la durata dell'intervallo di chip, a $4\,\mu s$, l'interferenza mutua tra i segnali peggiora ulteriormente.

Le prestazioni ottenute in fase di simulazione dalla matrice W_8 non aggiungono alcun risultato interessante, poichè si tratta essenzialmente di utilizzare le stesse sequenze, variando al più la durata dei chip. L'unico aspetto da rimarcare è che in questo caso sono disponibili soltanto 3 sequenze separate in frequenza, e si conferma il risultato di una maggiore interferenza mutua tra i due segnali le cui repliche si sovrappongono in banda.

In conclusione i pochi casi sopra riportati sono a sostegno delle previsioni fatte: i codici di Walsh presentano prestazioni sovrapponibili se impiegati singolarmente per la modulazione e demodulazione del segnale, purchè la banda del canale sia sufficiente in relazione alla frequenza del codice. Inoltre, per minimizzare il crosstalk, è conveniente scegliere sequenze di periodo diverso, e frequenze di chip per quanto possibile elevate.

3.3.3.2 Impiego di codici minimax

Sia i codici di Gold che i codici di Kasami sono selezioni di sequenze minimax con proprietà vantaggiose dal punto di vista della crosscorrelazione, che ne consentono l'impiego in sistemi CDMA asincroni; tuttavia, affinchè i limiti espressi dalle equazioni 2.27 e 2.28 assumano valori sufficientemente bassi da garantire buone prestazioni in termini di crosstalk, è necessario impiegare codici di lunghezza notevole, che per il sistema in esame richiederebbero, allo scopo di mantenere sufficientemente breve il periodo di codice nel tempo, frequenze di chip non utilizzabili. Inoltre il sistema CDMA in esame è di tipo sincrono, essendo sorgente e ricevitore collocati sullo stesso dispositivo.

Non intravedendo vantaggi potenziali dall'impiego di codici di Gold, Kasami e simili rispetto a semplici m-sequence o a codici di Legendre, l'indagine si è concentrata su queste due ultime classi di codici minimax. Le poche prove fatte con codici di Gold e Kasami, peraltro, non hanno incoraggiato un'esplorazione più approfondita.

Per quanto riguarda le sequenze minimax, ai nostri fini esse presentano soltanto due parametri a cui legare le prestazioni ottenute con il loro impiego:

- La lunghezza
- La frequenza di chip

Le prestazioni di questi codici sono state valutate con la stessa procedura vista per i codici ortogonali, impiegando il sistema di test di figura 3.9. A differenza del caso precedente, tuttavia, si sfruttano le proprietà di autocorrelazione dei codici minimax, e ciò comporta che, una volta trovato il ritardo che produce in uscita il segnale di ampiezza massima, le prestazioni in termini di crosstalk sono state valutate impostando altri valori di ritardo, ovviamente non multipli di quello "ottimo".

Sequenza minimax di lunghezza 7 Impiegando chip della durata di $1\,\mu s$, e una m-sequence di lunghezza 7, l'output corrispondente al ritardo ottimo è quello graficato in figura 3.25.

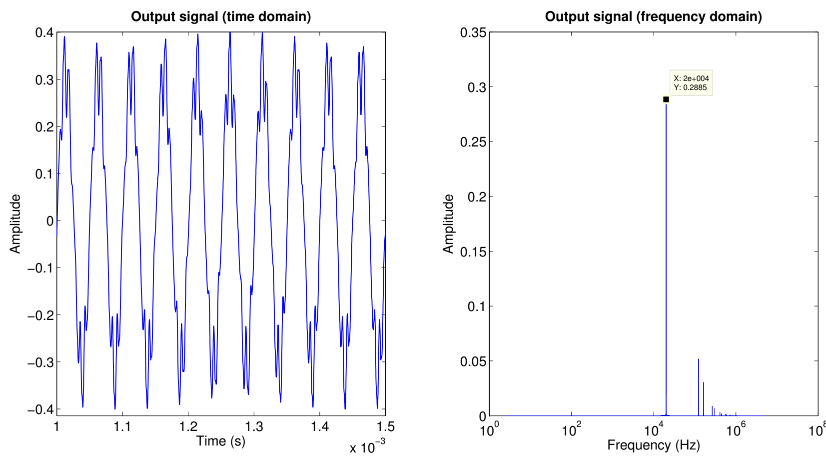


Figura 3.25

Andando a valutare le performance relative al crosstalk, demodulare con una replica del codice ritardata di un valore diverso da quello ottimo ha effetti variabili a seconda del ritardo impostato, ma i risultati sono confrontabili con quello in figura 3.26, ottenuto con un ritardo pari a 4 intervalli di chip.

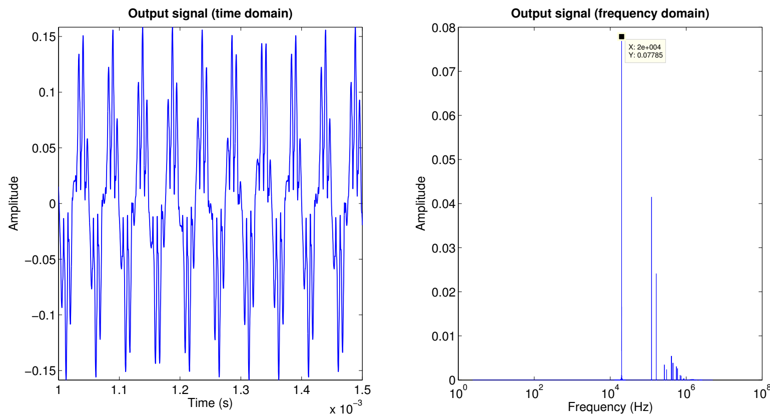


Figura 3.26

La sequenza di lunghezza 7 è una m-sequence molto breve, per la quale il rapporto tra i picchi secondari di autocorrelazione ed il picco centrale è limitato superiormente dal valore $\frac{1}{7}$, molto superiore a quello delle sequenze minimax solitamente utilizzate nelle applicazioni.

Prima di valutare il comportamento di sequenze di periodo maggiore di 7, si ripetono le simulazioni variando la frequenza di chip, ad esempio dimezzandola: i risultati sono riportati nelle figure 3.27 e 3.28. Aumentano sia l'ampiezza del segnale ricostruito che il crosstalk.

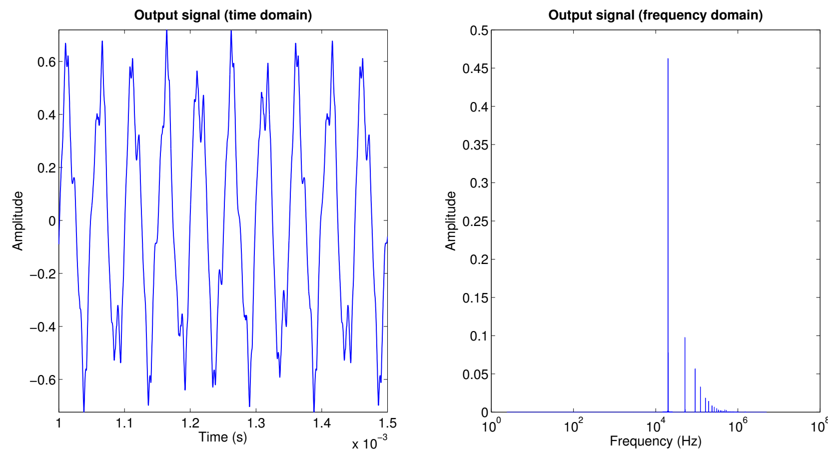


Figura 3.27

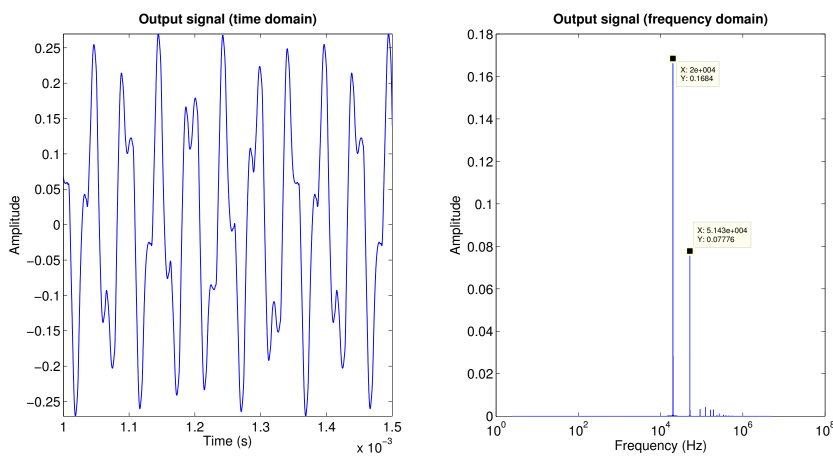


Figura 3.28

Reimpostando pari a 1 μs l'intervallo di chip, andiamo a testare gli effetti della m-sequence di lunghezza 15, immediatamente superiore alla precedente. Stimato il ritardo ottimo con la solita procedura, il segnale ricostruito in uscita è rappresentato in figura 3.29, mentre per un ritardo di 5 intervalli di chip superiore al valore ottimo si ha il risultato di figura 3.30. I risultati per il crosstalk appaiono peggiorare con l'aumento della lunghezza del codice; ragionando in termini di armoniche si può pensare di mettere in relazione questa tendenza con la diminuzione della frequenza di codice, e quindi della distanza tra le repliche spettrali del segnale modulato.

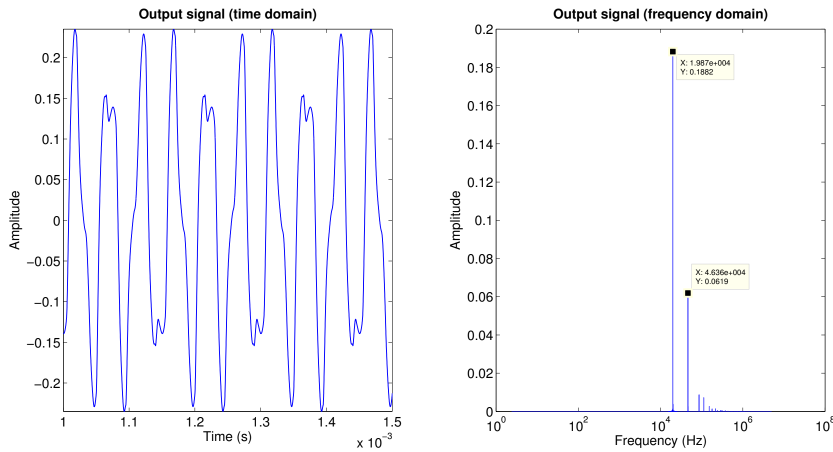


Figura 3.29

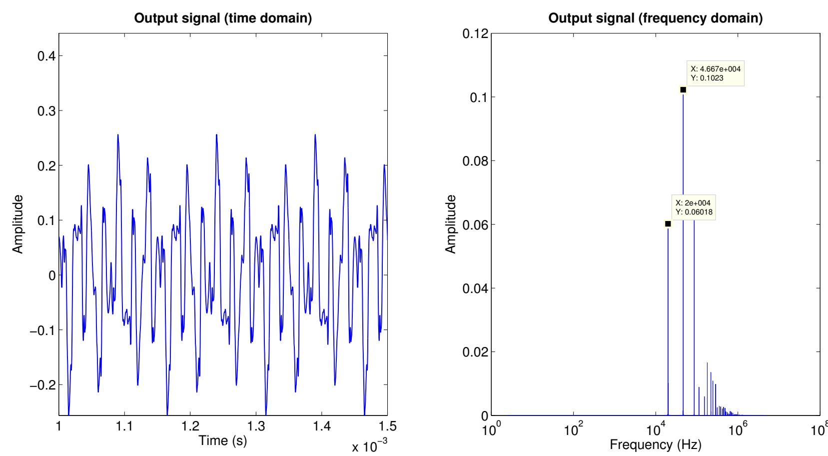


Figura 3.30

In figura 3.31 e 3.32 si riportano i risultati della simulazione precedente, ripetuta dimezzando la durata dei chip (0.5 μs). In questo modo il periodo con cui la sequenza si ripete nel tempo è analogo a quello della sequenza di lunghezza 7 con chip di durata 1 μs. Le prestazioni appaiono tuttavia migliorate, e ciò è in linea con l'aumento del rapporto tra l'ampiezza del picco centrale di correlazione e quella dei lobi laterali, per la sequenza in uso.

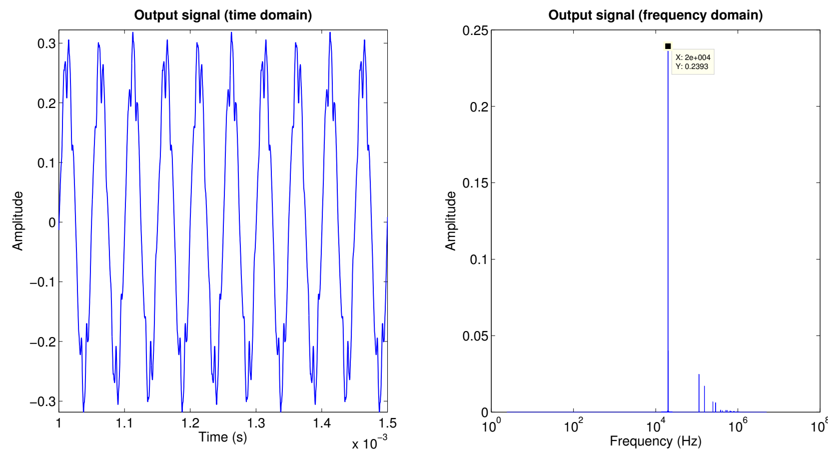


Figura 3.31: Uscita con ritardo ottimo.

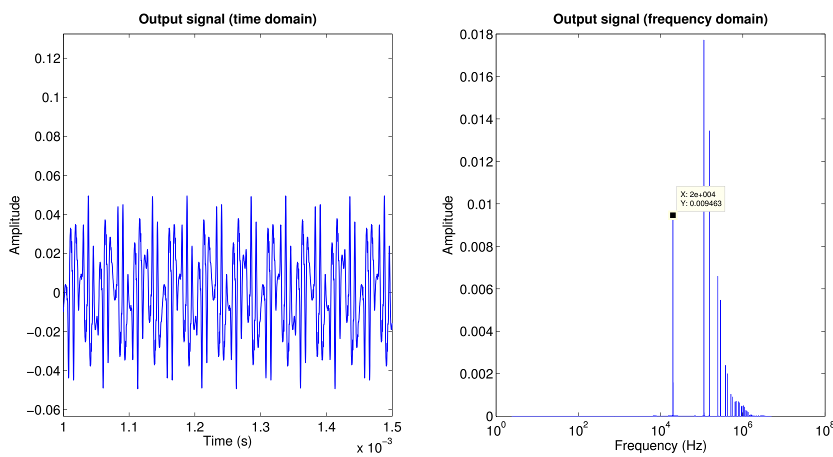


Figura 3.32: Crosstalk.

3.4 Validazione del sistema proposto

I tentativi di dimensionamento del sistema di figura 3.9 hanno consentito di mettere a punto una procedura per sperimentare una multiplazione CDMA sul canale dell' SD746. Essenzialmente sono stati individuati alcuni parametri sensibili da considerare per la scelta dei codici e della frequenza di chip, e si è cercato di dotarsi di criteri per effettuare le simulazioni in modo più mirato, scegliendo di volta in volta la configurazione da testare in modo non completamente arbitrario.

Al momento dell'assegnazione del presente lavoro di tesi era stato richiesto di valutare la possibilità di adattare l'interfaccia FDMA dell' SD746 ad una tecnica di multiplazione a suddivisione di codice, mantenendo per quanto possibile invariata la struttura interna dei blocchi funzionali del sistema. In particolare si è iniziato a lavorare considerando sostanzialmente vincoli del progetto le caratteristiche del convertitore A/D sigma-delta e dell'amplificatore di carica, blocchi particolarmente critici che avevano richiesto una progettazione attenta ed articolata, sebbene mirata all'interfaccia FDMA in uso.

Praticamente tutti i dettagli dell'architettura presa in esame sono coperti da segreto industriale, e non verranno qui esposti. È tuttavia opportuno segnalare che dopo i primi deludenti risultati il collo di bottiglia del sistema è stato individuato nel convertitore A/D, che nell'architettura proposta, come si nota in figura 3.3, deve trattare la sovrapposizione dei segnali multiplati, per giunta a spettro ampio a causa della modulazione di codice. L'idea iniziale era stata quella di aumentare la frequenza di lavoro del convertitore sigma-delta in uso per ciascun segnale dell'interfaccia FDMA di partenza, aumentandone la banda e rendendolo quindi capace a sopperire al nuovo impiego. Dopo aver valutato l'impraticabilità di tale approccio, a causa dell'eccessiva frequenza di clock che sarebbe stata necessaria, ci si è riservati di ricercare in un momento successivo una soluzione alternativa al problema della conversione A/D, limitandosi nelle simulazioni all'impiego di un modello ideale di convertitore, con risoluzione pari a quella nominale del sigma-delta disponibile.

Senza descrivere nel dettaglio tale blocco, si ricorda soltanto che nell'interfaccia dell' SD746 è presente uno stadio di trattamento del segnale a frequenza intermedia, che nell'architettura proposta è eliminato. Qualora successivi sviluppi di questo lavoro portino a valutare in concreto le caratteristiche di ingombro e consumo del convertitore A/D da impiegare, sarà interessante verificare se la rimozione dello stadio a frequenza intermedia, che al momento occupa circa il 24% del chip, abbia comportato un effettivo risparmio di area, e minori consumi.

Il risultato migliore è stato ottenuto con l'utilizzo di sequenze di Walsh di lunghezza 16, e frequenza di chip di 100 kHz (10 μs di durata per l'intervallo). La scelta ottima delle sequenze si è confermata quella 2, 4, 8, 16; modulando e demodulando con lo stesso codice si ottengono in uscita segnali con un buon rapporto segnale-rumore, sia inserendo nel modello i contributi di rumore per i vari componenti, così come stimati da Sensor Dynamics, che nel caso ideale. Purtroppo i risultati ottenuti in termini di crossatalk sono deludenti, e dal confronto con quelli, non divulgabili, dell'architettura di partenza, si nota un aumento di un ordine di grandezza della potenza del segnale di disturbo che si sovrappone in uscita al segnale ricostruito, entro la banda di 1 kHz.

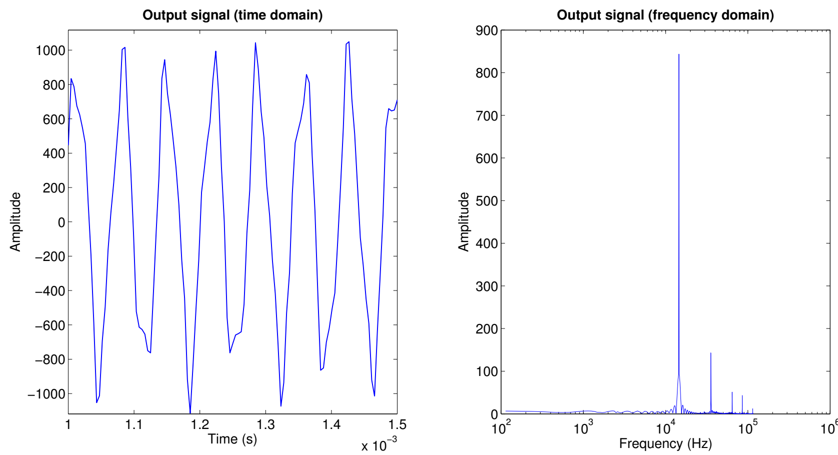


Figura 3.33: Segnale ricostruito dopo la modulazione con il codice 8 di W_{16}

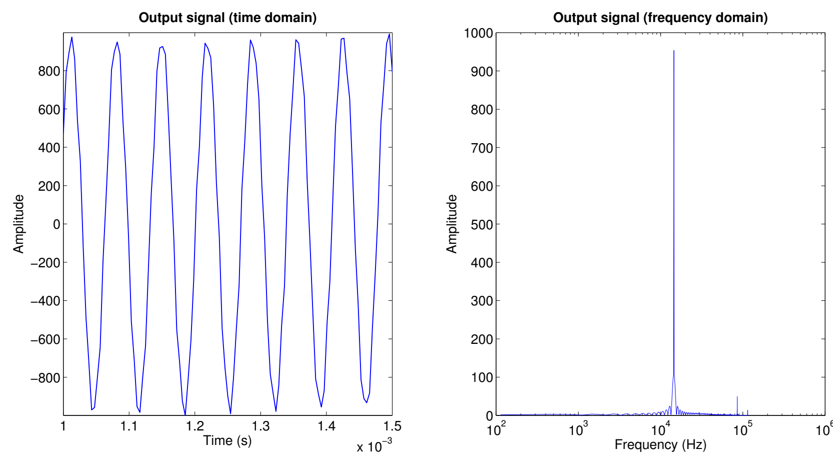


Figura 3.34: Segnale ricostruito dopo la modulazione con il codice 16 di W_{16}

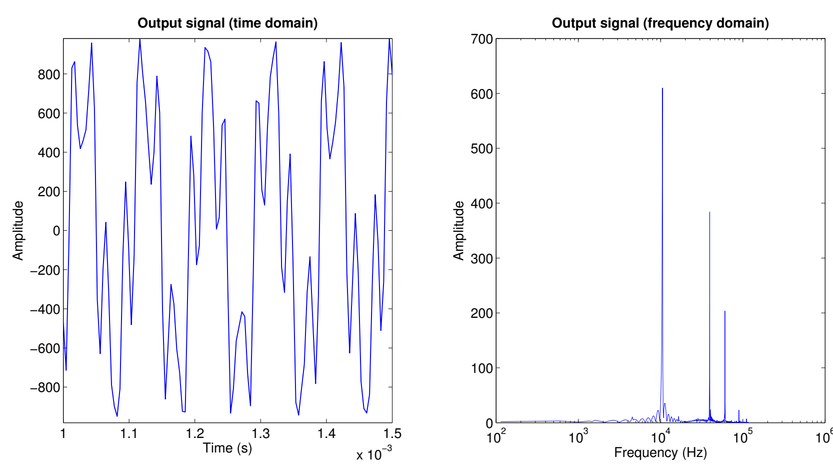


Figura 3.35: Interferenza sull'uscita demodulando con il codice 8 un ingresso modulato dal codice 4

Conclusioni

Il lavoro svolto è partito dalla richiesta di analizzare possibili tecniche di multiplazione, per segnali analogici, in grado di sostituire l'approccio a divisione di frequenza impiegato nell'interfaccia di lettura del giroscopio MEMS SD746.

Si è deciso di investigare la possibilità di realizzare una multiplazione a suddivisione di codice, riorganizzando i blocchi fondamentali della catena di trattamento del segnale e modulando i segnali informativi con sequenze binarie. Preso atto della scarsa documentazione disponibile, riguardo alla modulazione di codice per segnali analogici, si è provveduto ad analizzare gli effetti di tale tecnica sullo spettro dei segnali modulati, prevedendo, come si è poi verificato, che la banda del canale fosse un fattore determinante per il funzionamento dell'architettura proposta, ed essendo noto l'ampliamento dello spettro dei segnali conseguente alle modulazioni di codice.

Il lavoro è stato condizionato dai vincoli di segretezza industriale e dall'interruzione del rapporto con l'azienda Sensor Dynamics, a seguito di un cambio di proprietà, con il conseguente aggiornamento dei piani industriali.

Per ovviare ai limiti imposti dall'accordo di non divulgazione, e allo stesso tempo disporre di modelli realizzati su misura per valutare gli aspetti d'interesse, buona parte delle considerazioni fatte sono state rivolte a modelli semplici, realizzati dal candidato, riconducibili ad alcuni dei blocchi fondamentali del front end dell'SD746. Tali considerazioni hanno fornito un punto di partenza per un'indagine critica delle potenzialità del CDMA, rivolta all'architettura proprietaria, modificata a livello topologico eliminando gli stadi per il trattamento del segnale a frequenza intermedia.

I test effettuati consentono di affermare che, salvo realizzare modifiche architetturali a più basso livello sull'interfaccia SD746, le quali non erano nelle intenzioni dell'azienda al momento in cui il lavoro è stato proposto, il passaggio dalla tecnica di accesso FDMA a quella CDMA è svantaggiosa per quanto concerne gli effetti di crosstalk, mentre può presentare il vantaggio dell'eliminazione dello stadio a frequenza intermedia (24% di ingombro su chip), a patto che la realizzazione di un convertitore A/D con una banda adeguata non vanifichi tale vantaggio.

Possibili sviluppi futuri riguardano essenzialmente un'indagine a più basso livello dell'architettura CDMA proposta, spinta fino al livello dei singoli blocchi elementari, per poterne valutare obiettivamente le prestazioni in relazione alla complessità architetturale richiesta ed al consumo di potenza.

Bibliografia

[1] Jorge A Garcia, William Lawler, Nicholas Waite, and Fouad Kiamilev. 0.5-m CMOS Orthogonal Encoding Readout Cell for Active Imaging Systems. *Quantum*, 10(4):803–810, 2004.

[2] Valeri P Ipatov. *Spread Spectrum and CDMA: Principles and Applications*. Wiley, Chichester, 2005.

[3] V. Kempe. *Inertial MEMS: Principles and Practice*. Cambridge University Press, 2011.

[4] Hong-teuk Kim, Dae-hyun Kim, Youngwoo Kwon, and San Diego. Pseudonoise codes constructed. *Electronics Letters*, 38(8):2001–2002, 2002.

[5] Mykhaylo Lobur and Andriy Holovatyy. Overview and Analysis of Readout Circuits for Capacitive Sensing in MEMS Gyroscopes (MEMS Angular Velocity Sensors). pages 22–24, 2009.

[6] D.V. Sarwate and M.B. Pursley. Crosscorrelation properties of pseudorandom and related sequences. *Proceedings of the IEEE*, 68(5):593–619, 1980.

[7] Yoshiyuki Watanabe, Toshiaki Mitsui, Takashi Mineta, Seiya Kobayashi, Nobumitsu Taniguchi, and Kazuhiro Okada. Five-axis motion sensor with electrostatic drive and capacitive detection fabricated by silicon bulk micromachining. *Sensors and Actuators A: Physical*, 97-98:109–115, April 2002.